ANDREI ȚUGULEA
MIHAI VASILIU
GHEORGHE FRĂȚILOIU
EMANOIL COCOȘ

ELECTROTEHNICĂ

XI - XII

Prof. dr. doc. ing. ANDREI ŢUGULEA
Şef lucrări ing. GHEORGHE FRĂŢILOIU
Şef lucrări dr. ing. MIHAI VASILIU
Ing. prof. EMANOIL COCOŞ

Electrotehnica

Manual pentru licee industriale cu profil de electrotehnică, clasele a XI-a şi a XII-a, şi pentru şcoli profesionale



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI — 1983

Capitolul 1

ELECTROTEHNICA CÎMPULUI MAGNETIC

A. CARACTERIZAREA CÎMPULUI MAGNETIC, MĂRIMILE ŞI LEGILE ACESTUIA

1. Cîmpul magnetic în vid. Forţa lui Lorentz

Dacă un corp de probă încărcat cu sarcina electrică q se mişcă în vid în preajma unor oxizi naturali ai fierului (magneţi naturali) sau a unor conductoare parcurse de cu enţi, experienţa arată că asupra acestuia se exercită şi o forţă distinctă de cele gravitaţionale, mecanice sau electrice. Se spune că în jurul corpurilor sus-menţionate, în vid, se produce un *cîmp magnetic* care exercită o forţă magnetică asupra corpului de probă în mişcare.

● **Exprimarea matematică a forţei magnetice.** Fizicianul olandez *Hendrik Antoon Lorentz* (1853—1928) a arătat că forţa magnetică se poate exprima totdeauna prin relaţia vectorială:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.1}$$

în care:

q este sarcina corpului de probă;

$\vec{v}$ — viteza corpului de probă;

$\vec{B}$ — inducţia magnetică a cîmpului magnetic.

● **Interpretarea fizică a expresiei forţei magnetice.** Deoarece forţa magnetică, cunoscută şi sub numele de *„forţa lui Lorentz"*, se exprimă în funcţie de produsul vectorial dintre vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$, putem face următoarele afirmaţii verificabile experimental:

— forţa $\vec{F}_m$ este totdeauna perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ şi pentru sarcini pozitive ($q > 0$) se asociază acestora ca sens după regula burghiului drept (fig. 1.1), adică rotind pe $\vec{v}$ peste $\vec{B}$ după unghiul mai mic realizăm înaintarea burghiului în sensul forţei $\vec{F}_m$; pentru $q < 0$, sensul forţei $\vec{F}_m$ este opus (fig. 1.2);

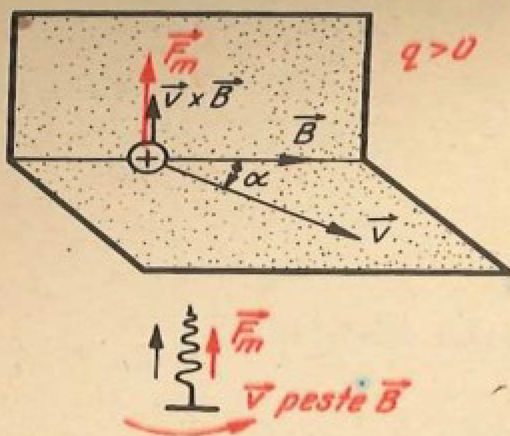


Fig. 1.1

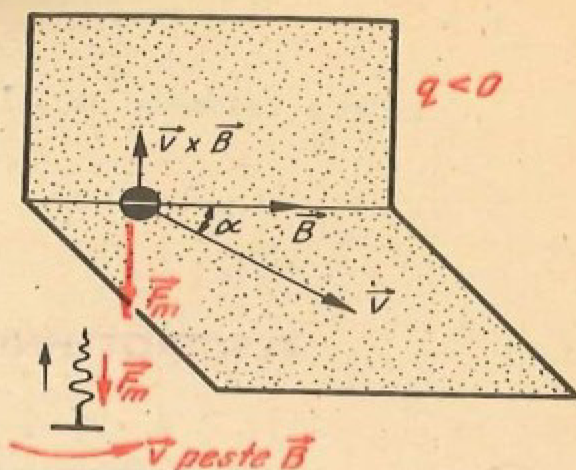


Fig. 1.2

— modulul forţei are expresia

$$F_m = |q| vB \sin \alpha, \tag{1.2}$$

α fiind unghiul dintre $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ (fig. 1.1).

În particular, forţa este maximă cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi are expresia:

$$F_{m\,max} = |q| vB. \tag{1.3}$$

Forţa este nulă cînd vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{B}$ sînt paraleli ($\alpha = 0$).

• Vectorul $\vec{B}$, adică **inducţia magnetică,** *este mărimea care caracterizează cîmpul magnetic în vid*, deoarece permite exprimarea forţei magnetice. Din relaţia (1.3) rezultă unitatea sa, numită *tesla* (simbol T):

$$\langle B\rangle = \frac{\langle F_m\rangle}{\langle q\rangle\langle v\rangle};$$

$$1 \text{ tesla} = \frac{1 \text{ newton} \times 1 \text{ secundă}}{1 \text{ coulomb} \times 1 \text{ metru}}$$

sau, folosind simbolurile corespunzătoare, $1\ \mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{C\cdot m}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot m}}$.

2. Momentul magnetic

Un **cîmp magnetic** se numeşte **uniform** sau **omogen într-o anumită regiune din spaţiu** dacă *inducţia sa magnetică este aceeaşi în fiecare punct din regiunea considerată, adică vectorul $\vec{B}$ are în toate punctele aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime* (fig. 1.3). Dacă într-un cîmp magnetic uniform se introduce un ac de busolă sau un mic magnet natural, experienţa arată că asupra acestuia se exercită un cuplu de forţe al cărui moment tinde să

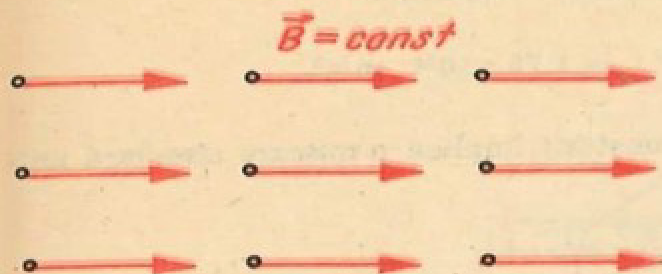


Fig. 1.3

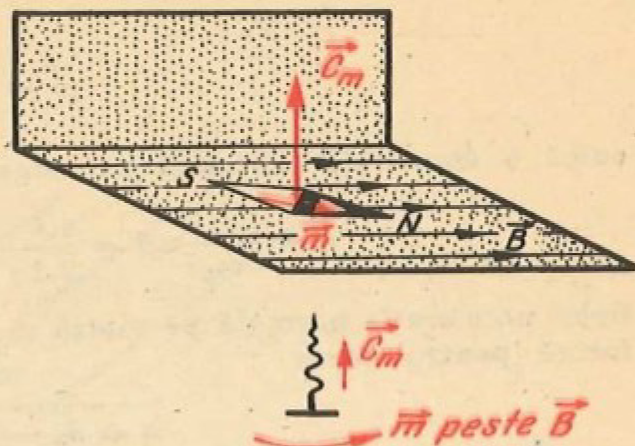


Fig. 1.4

orienteze o anumită axă a acului magnetic (axa polilor (S-N) pe direcţia cîmpului (fig. 1.4).

Expresia vectorială a acestui cuplu este:

$$\vec{C}_m = \vec{m} \times \vec{B}. \tag{1.4}$$

Mărimea $\vec{m}$ caracterizează starea de magnetizare a acului magnetic şi se numeşte *moment magnetic*. El este orientat după axa polilor, dinspre S spre N. De aceea, acul se áşază stabil cu axa polilor pe direcţia cîmpului. Datorită acestei proprietăţi, cîmpul magnetic din vid poate fi sondat cu ajutorul unui ac de busolă: sensul şi direcţia acului ne indică sensul şi direcţia cîmpului, iar mărimea sa rezultă din expresia cuplului:

$$B = \frac{C_{m\ max}}{m}.$$

Dacă pe o suprafaţă aflată într-un domeniu în care există cîmp magnetic se presară pilitură de fier, fiecare particulă se comportă ca un mic ac magnetic şi se orientează în lungul liniei de cîmp magnetic. În acest fel liniile de cîmp magnetic pot fi vizualizate (fig. 1.5).

Aplicaţia 1. *Să se calculeze forţa lui Lorentz care se exercită asupra unui electron ce pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $B = 1$ T, cu viteza $v = 10^5$ m/s perpendiculară pe $\vec{B}$.*

$$F_m = |q_e| vB = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\text{N}.$$

Aplicaţia 2. *Să se determine traiectoria electronului din aplicaţia 1, ştiind că masa sa este $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.*

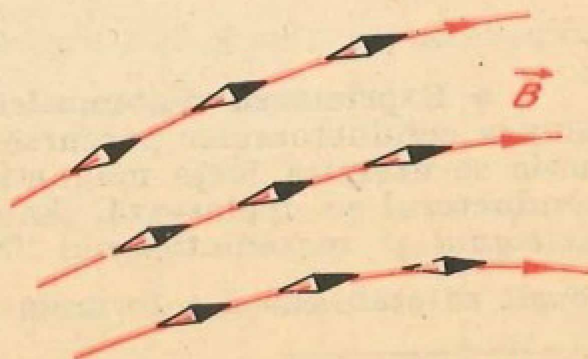


Fig. 1.5

Deoarece forţa este perpendiculară pe viteză, din legea fundamentală a dinamicii rezultă:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_m}{m_0} = \frac{q_e}{m_0} \vec{v} \times \vec{B},$$

adică o accelerație normală pe viteză, avînd modulul constant:

$$a = \frac{|q_e|}{m_0} vB = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1,76 \cdot 10^{16} \ \text{m/s}^2.$$

Orice accelerație normală pe viteză și de modul constant implică o mișcare circulară uniformă pentru care:

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{|q_e| \, vB}{m_0} = r\omega^2,$$

unde r este raza traiectoriei; obținem:

$$r = \frac{m_0 v}{|q_e| \, B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 5,68 \cdot 10^{-7} \ \text{m}$$

și viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10^5}{5,68 \cdot 10^{-7}} = 1,76 \cdot 10^{11} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Aplicația 3. *Care sînt viteza și energia cinetică ale unui electron care efectuează într-un cîmp de inducție $B = 0,5$ T o mișcare de rotație avînd $r = 10^{-5}$ m?*

Din aplicația 2 rezultă:

$$v = \frac{|q_e| rB}{m_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-5} \cdot 0,5}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 8,8 \cdot 10^5 \ \text{m/s};$$

$$W_c = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (8,8 \cdot 10^5)^2}{2} = 3,52 \cdot 10^{-19} \ \text{J}.$$

Aplicația 4. *Care este momentul magnetic al unui ac de busolă, știind că în cîmpul magnetic terestru ($B_t = 5 \cdot 10^{-5}$ T) asupra sa se exercită un cuplu maxim $C_{m\,max} = 10^{-5}$ Nm?*

$$m = \frac{C_{m\,max}}{B_t} = \frac{10^{-5}}{5 \cdot 10^{-5}} = 0,2 \ \frac{\text{Nm}}{\text{T}} = 0,2 \ \text{Am}^2.$$

3. Forța lui Laplace

• **Exprimarea matematică a forței lui Laplace.** Experiența arată că asupra conductoarelor parcurse de curent electric și introduse în cîmp magnetic se exercită forțe magnetice. Ca urmare a acțiunii forțelor magnetice, conductorul se deplasează. Analizînd experiențele lui *Oersted** și *Ampère***, fizicianul și matematicianul francez *Pierre Simon Laplace* (1749—1827) a reușit să stabilească o formulă generală pentru calculul *forței magnetice* $\vec{F}_L$

* *Hans Christian Oersted* (1777—1851) — fizician danez.

** *André-Marie Ampère* (1775—1836) — fizician și matematician francez.

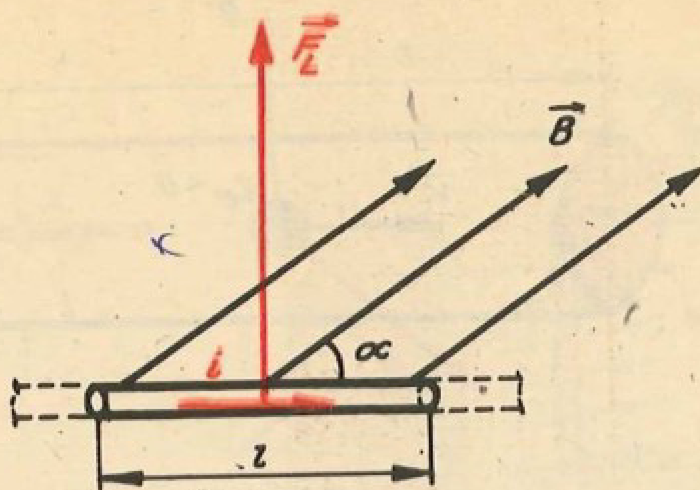


Fig. 1.6

ce se exercită asupra unui segment rectiliniu de conductor parcurs de curent. Această expresie, numită şi **forţa lui Laplace,** este:

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \times \vec{B} \tag{1.5}$$

unde:

i este intensitatea curentului electric care străbate conductorul;

$\vec{l}$ — lungimea segmentului de conductor orientat în sensul curentului (fig. 1.6);

$\vec{B}$ — inducţia magnetică a unui cîmp uniform.

• **Interpretarea fizică a expresiei forţei lui Laplace.** Din expresia forţei lui Laplace rezultă următoarele consecinţe fizice verificabile experimental:

— forţa lui Laplace este totdeauna perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{l}$ şi $\vec{B}$;

— forţa lui Laplace este maximă cînd vectorii $\vec{l}$ şi $\vec{B}$ sînt perpendiculari şi nulă cînd vectorii sînt paraleli:

$$F_{L\,max} = iBl;$$

— dacă vectorii fac un unghi α, atunci:

$$F_L(\alpha) = iBl \sin \alpha;$$

— sensul forţei lui Laplace se asociază cu sensurile vectorilor $\vec{l}$ şi $\vec{B}$ după *regula burghiului drept* (v. forţa lui Lorentz).

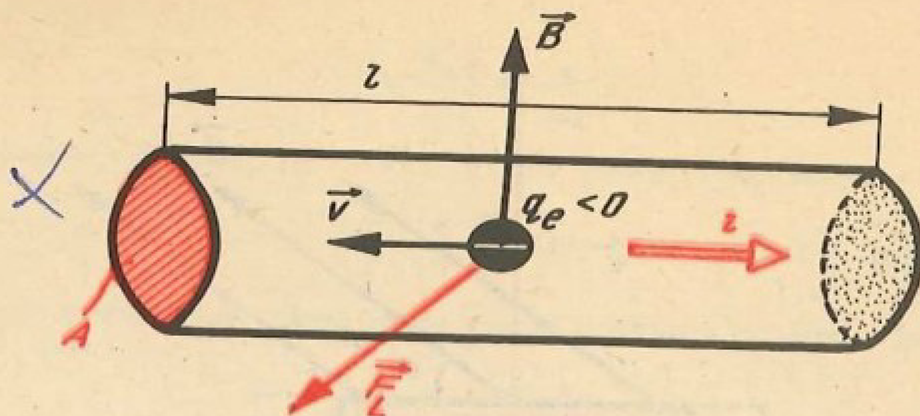


Fig. 1.7

• **Legătura dintre forța lui Laplace și forța lui Lorentz.** *Forța lui Laplace nu este decît o manifestare macroscopică a forței lui Lorentz.* În adevăr, dacă presupunem că purtătorii de sarcină care constituie curentul electric sînt electroni (fig. 1.7), atunci ținînd seama de semnificația microscopică a intensității curentului electric (v. Electrotehnica cl. X., cap. 2), obținem:

$$i = JA = n|q_e|vA, \tag{1.6}$$

unde n este concentrația de electroni, $q_e < 0$ — sarcina electronului, v — viteza de mișcare ordonată a electronilor, iar A — aria secțiunii transversale a conductorului. Substituind (1.6) în relația (1.5), obținem:

$$\vec{F}_L = n|q_e|vA\vec{l} \times \vec{B} = nAlq_e\vec{v} \times \vec{B} = N_e q_e \vec{v} \times \vec{B},$$

unde $N_e = nAl$ este numărul total de electroni liberi din volumul Al al segmentului de conductor. S-a ținut seamă că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{l}$ au sensuri opuse deoarece electronii sînt negativi și deci $|q_e|\vec{l}v = q_e\vec{v}l$.

Se observă că *forța lui Laplace este rezultanta forțelor lui Lorentz ce se exercită asupra celor N_e electroni care participă la curent în cuprinsul segmentului de conductor.* Deoarece electronii nu pot părăsi conductorul, această forță se transmite rețelei cristaline rigide a conductorului și apare ca o forță rezultantă macroscopică, adică forța lui Laplace.

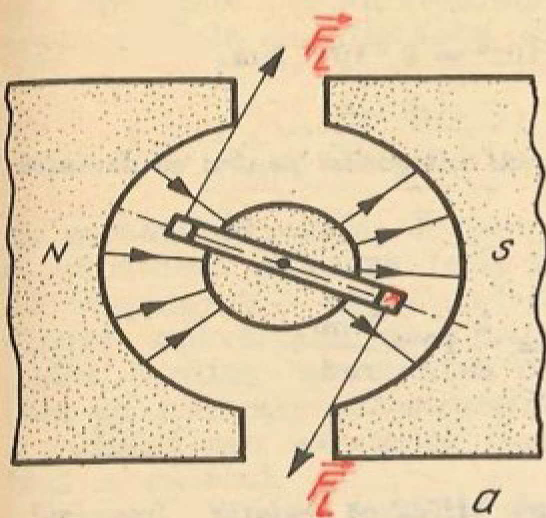
• **Măsurarea intensității curentului electric cu galvanometrul magnetoelectric.** Galvanometrul magnetoelectric (inventat de *Ampère*) este constituit dintr-un cadru dreptunghiular de arie $2a \times l$ pe care sînt înfășurate N spire (fig. 1.8, *b*) și care se poate roti între polii unui magnet permanent, unde se creează un cîmp magnetic radial (fig. 1.8, *a*).

Dacă spirele bobinei sînt parcurse de curentul i, atunci asupra unei laturi de bobină de lungime l se va exercita forța lui Laplace:

$$F_L = NiBl,$$

iar asupra celeilalte laturi — o forță opusă (fig. 1.8, *a*). Aceste forțe vor produce un *cuplu activ* de moment

$$C_a = 2aF_L = 2aNiBl.$$



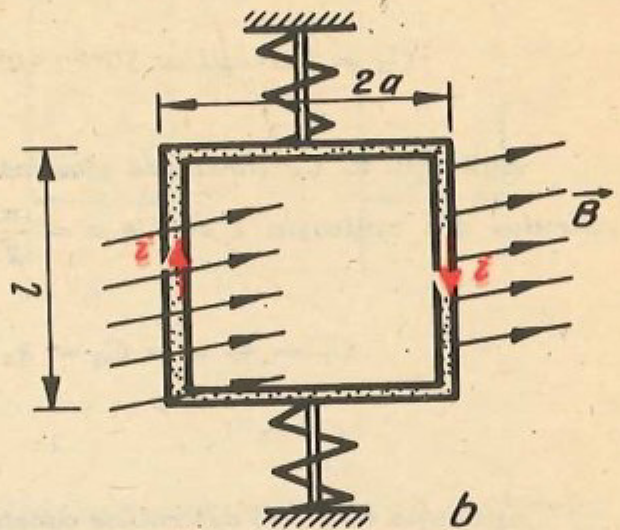


Fig. 1.8

Sub acţiunea acestui cuplu activ bobina se va roti, răsucind firele elastice de suspensie, care vor crea un *cuplu antagonist (sau rezistenţa)* a cărui expresie, conform legii lui *Hooke*, va fi

$$C_r = k_e\,\alpha,$$

unde k_e este constanta de elasticitate a firelor, iar α este unghiul de răsucire a bobinei şi deci a firelor.

La echilibru, cele două cupluri sînt egale

$$k_e\,\alpha = 2aNiBl,$$

de unde rezultă:

$$i = \frac{k}{2aNBl}\,\alpha = k_g\,\alpha.$$

k_g se numeşte *constanta galvanometrului*. Măsurînd unghiul α, se determină i. Cu ajutorul galvanometrului magnetoelectric se pot măsura intensităţi de curent de ordinul 10^{-12} A şi chiar mai mici.

Galvanometrele se leagă în serie cu circuitul în care se măsoară intensitatea curentului (fig. 1.9). Pentru extensia domeniului de măsurare se utilizează *şunturi* (fig. 1.10).



Fig. 1.9



Fig. 1.10

Aplicația 1. *Cadrul mobil al unui galvanometru, format din $N = 100$ spire, de lungime $l = 2$ cm și lățime $2a = 1$ cm, este parcurs de un curent $i = 10$ µA. Să se determine cuplul activ ce se exercită asupra lui, știind că inducția magnetică între poli este $B = 0,1$ T.*

$$C_a = 2aNiBl = 10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Nm}.$$

Aplicația 2. *Ce constantă elastică trebuie să aibă resortul antagonist pentru ca deviația cadrului din aplicația 1 să fie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (90°)?*

$$C_r = k_e\ \alpha = C_a \Rightarrow k_e = \frac{C_a}{\alpha} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} 10^{-8} \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}.$$

Aplicația 3. *Să se determine constanta unui galvanometru, știind că deviația sa maximă, $\alpha_{max} = 100$ diviziuni, se obține la $i_{max} = 1$ µA.*

$$k_g = \frac{i_{max}}{\alpha_{max}} = \frac{10^{-6}}{100} = 10^{-8} \text{ A/div}.$$

⊙ **Observație.** Adesea deviațiile bobinei se măsoară pe o riglă gradată în diviziuni și deci k_g se exprimă în A/div.

Aplicația 4. *Știind că rezistența bobinei galvanometrului din aplicația 3 este $r_g = 100$ Ω, să se determine rezistența șuntului pentru ca să se poată măsura $I_{max} = 1$ A.*

Din egalitatea căderilor de tensiune obținem

$$r_s = r_g/\left(\frac{I_{max}}{i_{g\ max}} - 1\right) = 100/(1/10^{-6} - 1) \cong \frac{100}{10^6} \cong 10^{-4}\ \Omega.$$

4. Forța lui Ampère

• **Exprimarea matematică a forței lui Ampère.** Fizicianul francez *A.M. Ampère* (1820) a studiat *forțele magnetice ce se exercită între două conductoare paralele parcurse de curenți* (fig. 1.11). Observațiile sale experimentale l-au condus la următoarele concluzii:

— conductoarele parcurse de curenți de același sens se atrag (fig. 1.11, *a*); conductoarele parcurse de curenți de sens contrar se resping (fig. 1.11, *b*);

— forțele care se exercită în vid asupra conductoarelor sînt universal proporționale cu produsul intensităților și cu lungimea conductoarelor și invers proporționale cu distanța dintre ele:

$$F_A = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2}{r} \cdot l. \qquad (1.7)$$

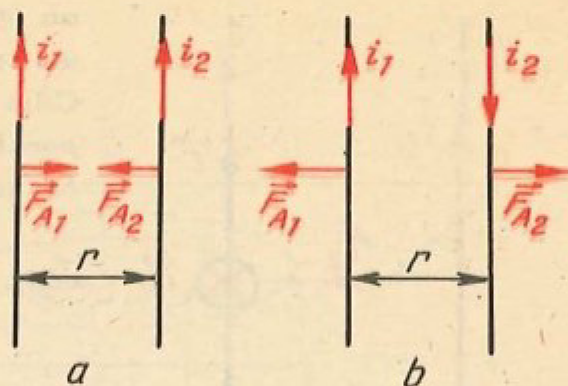


Fig. 1.11

În această expresie, forțele de atracție se consideră pozitive ($i_1 i_2 > 0$), iar cele de respingere — negative ($i_1 i_2 < 0$). Constanta universală de proporționalitate $\mu_0/2\pi$ conține constanta universală μ_0, care se numește *permeabilitatea absolută a vidului* sau *constanta magnetică absolută a vidului*.

• **Definirea unității de măsură pentru intensitatea curentului electric.** Valoarea lui μ_0 s-a ales convenabil la definirea unității de intensitate de curent, numite *amper* (A):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ unități SI.}$$

Dacă $i_1 = i_2 = 1$ A, $l = 1$ m, iar distanța între conductoare $r = 2$ m, se obține

$$F_A = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{1^2 \cdot 1}{2} = 10^{-7} \text{ N.}$$

Rezultă deci următoarea definiție a amperului: **amperul** *este intensitatea curentului din fiecare conductor al unei perechi de conductoare paralele situate în vid la distanța de 2 m, atunci cînd asupra fiecărui metru de lungime a fiecărui conductor se exercită forța de 10^{-7} N.*

În afară de amper, în electrotehnică se mai folosesc
1 pA $= 10^{-12}$ A (picoamper);
1 μA $= 10^{-6}$ A (microamper);
1 mA $= 10^{-3}$ A (miliamper);
1 kA $= 10^3$ A (kiloamper);
1 MA $= 10^6$ A (megaamper).

Aplicația 1. *Să se calculeze forța lui Ampère ce se exercită între două conductoare paralele de lungime $l = 1,5$ m, situate în vid la distanța $r = 0,5$ m, parcurse de curenți avînd intensitățile $i_1 = i_2 = 10\,000$ A.*

$$F_A = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{l}{r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} (10^4)^2 \frac{1,5}{0,5} = 60 \text{ N.}$$

Aplicația 2. *Două conductoare paralele de lungime $l = 2$ m, situate în vid la distanța $r = 0,2$ m, sînt parcurse de curenți egali în intensitate. Ce valoare are i dacă forța amperiană de atracție este $F_A = 50$ N?*

$$i = \sqrt{\frac{2\pi r F_A}{\mu_0 l}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,2 \cdot 50}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}} = 5\,000 \text{ A.}$$

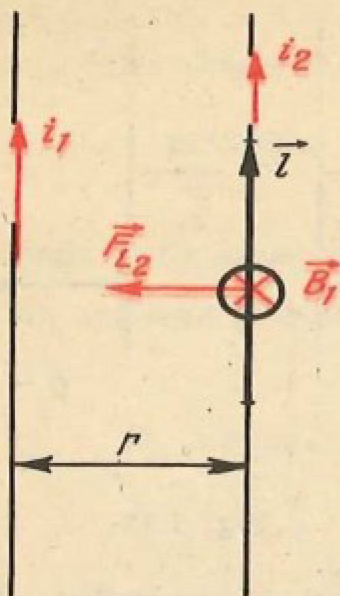


Fig. 1.12

Aplicația 3. *Pentru verificarea formulei lui Ampère, un laborator dispune de o singură sursă care poate furniza un curent a cărui intensitate maximă este $I_{max} = 100$ A. Cum trebuie distribuit acest curent între două conductoare paralele dispuse la $l = 1$ m și avînd $r = 0,1$ m, pentru ca să se obțină forțe amperiene maxime?*

Deoarece $i_1 + i_2 = I_{max} = const$ și forța amperiană este proporțională cu produsul lor

$$F_A \sim i_1 i_2,$$

iar produsul a două numere a căror sumă este constantă este maxim cînd numerele sînt egale, rezultă

$$i_1 = i_2 = \frac{I_{max}}{2} = 50 \text{ A};$$

$$F_A = \frac{4\pi \ 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{50^2}{0,1} \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

5. Formula Biot-Savart

Din punctul de vedere al teoriei cîmpului, care nu admite acțiune la distanță, forța lui Ampère se interpretează astfel: *fiecare dintre cele două conductoare produce în jurul său un cîmp magnetic care exercită o forță asupra conductorului vecin.* Așadar, forța lui Ampère exercitată asupra conductorului *2* (fig. 1.12) este interpretată drept forță a lui Laplace exercitată de cîmpul magnetic produs de conductorul *1:*

$$F_{A2} = F_{L2} \Rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} l = B_1 i_2 l.$$

După simplificare rezultă:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \qquad (1.8)$$

care se numește *formula lui Biot-Savart**.

Deoarece forța lui Laplace este perpendiculară pe planul determinat de conductor și de cîmp, rezultă că vectorul $\vec{B}$ este tangent la cercul de rază r cu centrul pe axa conductorului *1*. Așadar, liniile de cîmp magnetic ale unui conductor rectiliniu și foarte lung sînt cercuri concentrice cu centrul

* *Jean-Baptiste Biot* (1774—1862) — fizician și astronom francez;
Felix Savart (1791—1841) — fizician francez.

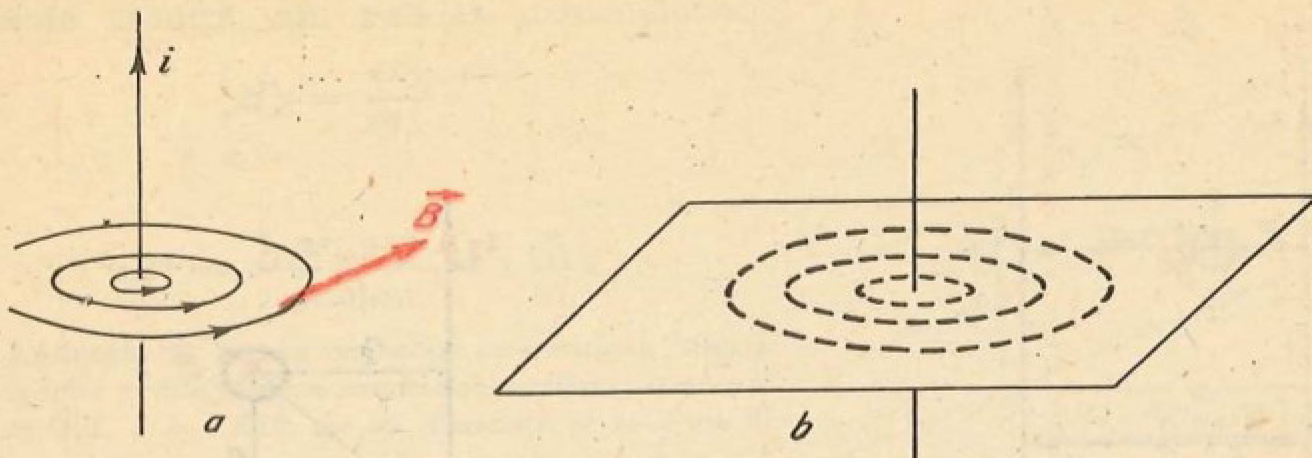


Fig. 1.13

pe conductor (fig. 1.13, *a*). Ele pot fi puse în evidenţă cu ajutorul piliturii de fier (fig. 1.13, *b*). Sensul vectorului $\vec{B}$ se asociază după regula burghiului drept cu sensul curentului.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze inducţia magnetică produsă în vid de un fir rectiliniu foarte lung parcurs de curentul* $i = 100$ *A, la distanţa* $r = 1$ *m.*

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Aplicaţia 2. *Două conductoare paralele foarte lungi sînt parcurse de curenţii* $i_1 = 100$ *A şi* $i_2 = 200$ *A de acelaşi sens; distanţa dintre ele este* $r = 0{,}3$ *m. Să se afle punctul în care inducţia magnetică se anulează (fig. 1.14).*

Se observă că între conductoare cîmpurile se scad (fig. 1.14):

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(r - x)} = 0.$$

Obţinem ecuaţia:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{x}{r - x} \Rightarrow x = r\frac{i_1}{i_1 + i_2} = 0{,}3\,\frac{100}{100 + 200} = 0{,}1 \text{ m}.$$

○ **Observaţie.** Dacă $i_1 = i_2 \Rightarrow x = \frac{r}{2} = 0{,}15$ m.

Aplicaţia 3. *Două conductoare perpendiculare, situate în acelaşi plan, sînt parcurse de curenţii* i_1 *şi* i_2*. Să se afle cîmpul pe bisectoarea unghiului lor (fig. 1.15).*

Pe bisectoare $r_1 = r_2 = r$, deci

$$B = B_1 \pm B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r}(i_1 \pm i_2).$$

Semnul (—) corespunde cazului cînd curenţii au acelaşi sens faţă de origine, iar semnul (+) cînd au sens contrar.

Dacă $i_1 = 20\,000$ A şi $i_2 = 10\,000$ A, iar $r = 1$ m:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}(20\,000 \pm 10\,000) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-3} \text{ T} \\ 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}. \end{cases}$$

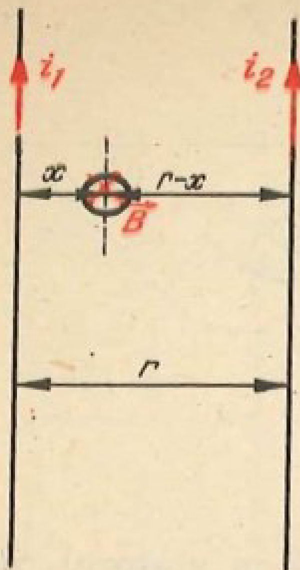


Fig. 1.14

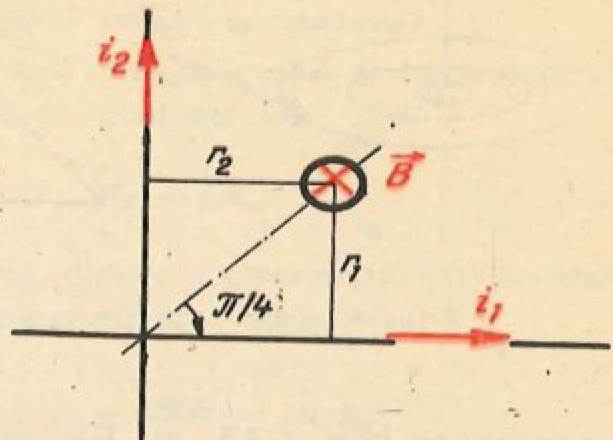


Fig. 1.15

6. Intensitatea cîmpului magnetic

• **În vid, intensitatea cîmpului magnetic este vectorul**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{1.9}$$

Deci în vid acest vector este universal proporțional cu inducția magnetică.

• **În corpurile magnetizabile nu se mai păstrează această proporționalitate universală iar $\vec{H}$ se definește prin relația**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu} \tag{1.10}$$

în care:

μ_r este permeabilitatea magnetică relativă — mărime de material care depinde de natura corpurilor;

$\mu = \mu_0\mu_r$ este permeabilitatea magnetică absolută a corpurilor.

Din formula Biot-Savart rezultă

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{i}{2\pi r} \tag{1.11}$$

• **Unitatea de intensitate a cîmpului magnetic** rezultă din relația dimensională

$$\langle H\rangle = \frac{\langle i\rangle}{\langle l\rangle},$$

deci

$$1\ \text{uSI} = \frac{1\ \text{amper}}{1\ \text{metru}} = 1\ \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Aplicația 1. *Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic produs de un conductor rectiliniu parcurs de curentul $i = 6\,280$ A la distanța $r = 1$ m de axa sa.*

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{6\,280}{2\pi \cdot 1} = 1\,000\ \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

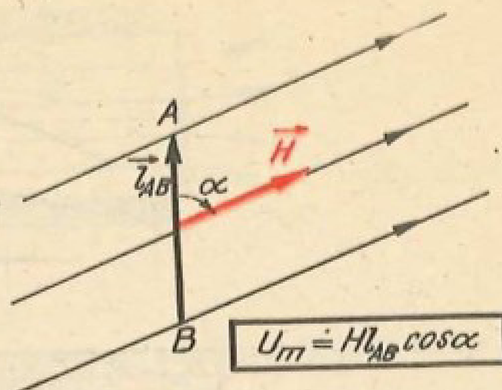


Fig. 1.16

Aplicația 2. *Să se calculeze inducția produsă de conductorul de mai sus într-un mediu feromagnetic de permeabilitate relativă $\mu_r = 100$.*

$$B = \mu_0 \mu_r H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{2} \cdot 10^{3} = 1{,}257 \cdot 10^{-1}\ \text{T}.$$

7. Tensiunea magnetică. Teorema lui Ampère

• **Considerăm un cîmp magnetic uniform** de inducție $\vec{B}$ și intensitate $\vec{H}$ (fig. 1.16) **și un drum rectiliniu.**

Se numește *tensiune magnetică asociată unui drum rectiliniu l_{AB}* mărimea

$$U_m = H l_{AB} \cos\alpha \qquad (1.12)$$

Tensiunea magnetică este o mărime algebrică, al cărei sens de calcul este cel al vectorului $\vec{l}_{AB}$ (fig. 1.16). Astfel:

$$U_m = H l_{AB} \cos\alpha = \begin{cases} H l_{AB} & \text{dacă } \alpha = 0; \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \frac{\pi}{2}; \\ -H l_{AB} & \text{dacă } \alpha = \pi. \end{cases}$$

• **Pentru drumuri nerectilinii și cîmpuri neuniforme,** noțiunea de tensiune magnetică se generalizează împărțind drumul în segmente rectilinii suficient de mici pentru ca în cuprinsul lor cîmpul să fie uniform. Astfel, pentru fiecare segment de drum se poate aplica definiția (1.12) iar rezultatele pentru întregul drum se însumează algebric (fig. 1.17):

$$U_m = \sum_k H_k\, \Delta l_k \cos\alpha_k \qquad (1.13)$$

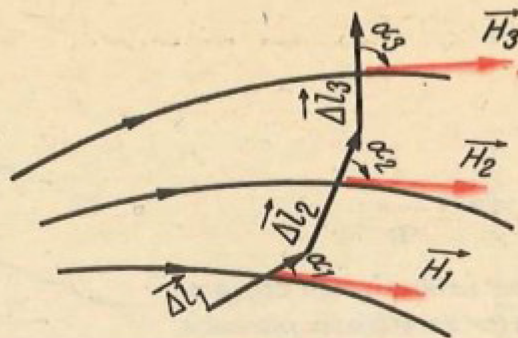


Fig. 1.17

Dacă drumul este închis tensiunea magnetică se numește *tensiune magnetomotoare* (U_{mm}).

• **Teorema lui Ampère** afirmă: *tensiunea magnetomotoare pe orice drum închis este egală cu suma algebrică a intensităților curenților din firele înconjurate de drumul închis:*

$$U_{mm} = \sum_k i_k \tag{1.14}$$

Suma algebrică a curenților înconjurați de o curbă închisă se numește *solenație.*

Ilustrăm teorema lui Ampère pentru un fir rectiliniu foarte lung parcurs de curentul i (fig. 1.18). Alegem drept drum închis o linie de cîmp circulară de rază r. Deoarece pe această linie de cîmp $\vec{H}$ are mărimea constantă și este mereu tangent la cerc, obținem

$$U_{mm} = \sum_{cerc} H_k \ \Delta l_k = H \cdot l_{cerc} =$$

$$= \frac{i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = i.$$

Teorema este valabilă pentru orice drum închis oricare ar fi natura corpurilor prin care trece drumul.

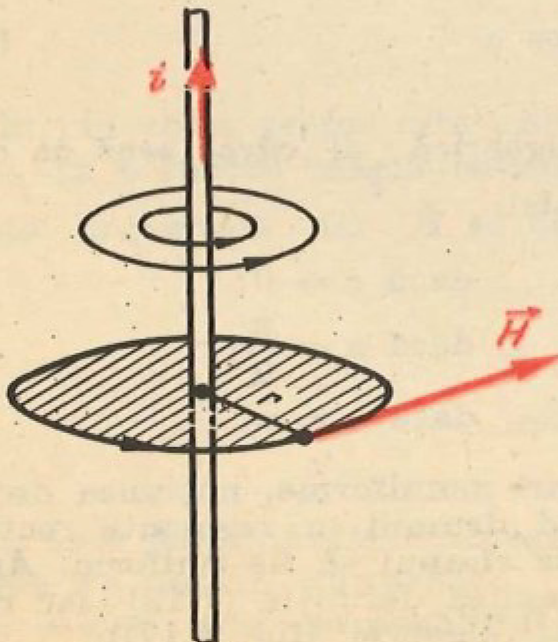


Fig. 1.18

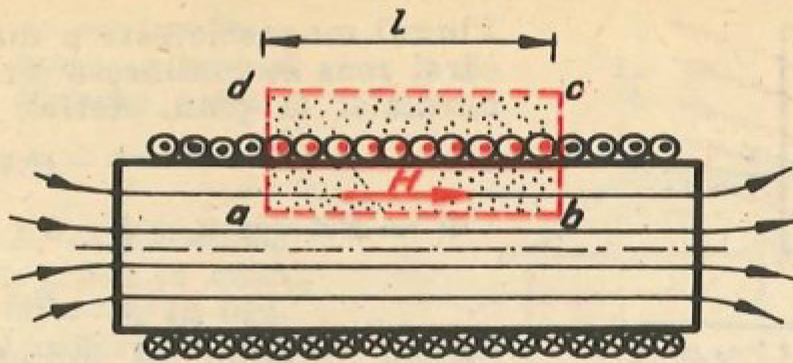


Fig. 1.19

Aplicaţie. *Să se calculeze inducţia magnetică într-un solenoid foarte lung avînd N spire, de lungime l, parcurse de curentul i (fig. 1.19).*

Experienţa arată că în solenoid cîmpul este uniform, vectorii $\vec{H}$ şi $\vec{B}$ fiind orientaţi în lungul axei solenoidului; în exteriorul solenoidului cîmpul este nul. Aplicăm teorema lui Ampère pe un drum închis dreptunghiular *a, b, c, d, a* care cuprinde cele *N* spire situate pe lungimea *l*.

$$U_{mm} = H \cdot l_{ab} \cos 0 + H \cdot l_{bc} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot l_{cd} + Hl_{da} \cos \frac{\pi}{2} = H \cdot l = Ni (l_{ab} \equiv l).$$

Rezultă

$$H = \frac{Ni}{l} \qquad (1.15)$$

Pentru $N = 1\,000$ spire, $l = 0{,}5$ m şi $i = 2$ A obţinem:

$$H = \frac{1\,000 \cdot 2}{0{,}5} = 4\,000 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Inducţia magnetică va fi

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{l} \qquad (1.16)$$

Dacă $\mu_r = 50$,

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 4\,000 = 2{,}51 \cdot 10^{-1} \text{ T}.$$

8. Fluxul magnetic

• **Considerăm un cîmp magnetic uniform** avînd inducţia $\vec{B}$ şi o suprafaţă plană de arie *A* a cărei normală $\vec{n}$ face unghiul α cu liniile de cîmp (fig. 1.20). Se numeşte *flux magnetic* mărimea scalară

$$\Phi = BA \cos \alpha \qquad (1.17)$$

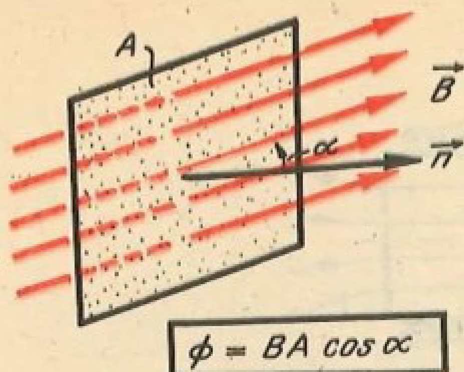


Fig. 1.20

Fluxul magnetic este o mărime algebrică al cărei sens se definește în raport cu sensul normalei la plan. Astfel

$$\Phi = BA \cos \alpha = \begin{cases} BA & \text{dacă } \alpha = 0; \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \frac{\pi}{2}; \\ -BA & \text{dacă } \alpha = \pi. \end{cases}$$

Sensul fluxului se indică adesea printr-o săgeată orientată în sensul normalei.

Unitatea de flux magnetic se numește *weber* (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2.$$

• **Pentru cîmpuri neuniforme și suprafețe care nu sînt plane,** noțiunea se generalizează împărțind suprafața în suprafețe elementare plane de arie ΔA_k în cuprinsul cărora cîmpul este practic uniform; calculînd fluxurile elementare cu relația de definiție (1.17) și însumînd algebric rezultatele, se obține (fig. 1.21)

$$\Phi = \sum_{(k)} B_k \Delta A_k \cos \alpha_k \qquad (1.18)$$

• **Legea fluxului magnetic.** *Fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul* (fig. 1.22). Semnificația fizică a acestui enunț rezultă din faptul că liniile de cîmp ale inducției magnetice sînt curbe închise care înconjoară conductoarele parcurse de curenți. Aceste linii nu izvorăsc și nu se scurg nicăieri, spre deosebire de liniile de cîmp electric care izvorăsc din sarcinile pozitive și se scurg în sarcinile negative. Cu alte cuvinte, ***în natură nu există sarcini magnetice capabile să producă cîmp magnetic*** așa cum sarcinile electrice produc cîmp electric.

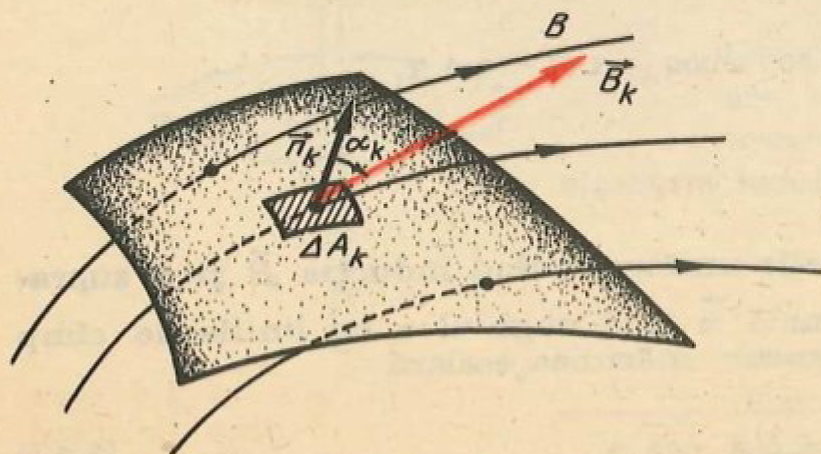


Fig 1.21

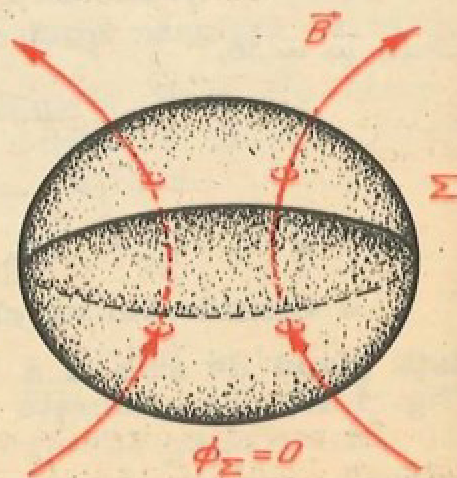


Fig. 1.22

Aplicația 1. *Să se verifice legea fluxului magnetic pentru suprafața unui cub de latură a așezat într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\vec{B}$ (fig. 1.23).*

Fie B_x, B_y și B_z componentele scalare ale cîmpului în raport cu axele de coordonate *Oxyz* alese ca în figura 1.23. Cîmpul fiind uniform, aceste componente sînt constante. Calculăm fluxurile prin cele șase fețe ale cubului, considerîndu-le pozitive cînd ies și negative cînd intră:

$$\Phi_{cub} = B_x A_{abcd} - B_x A_{efgh} + B_y A_{bcgf} - B_y A_{adeh} + B_z A_{dcgh} - B_z A_{abfe} = 0$$

Fig. 1.23

deoarece

$$A_{abcd} = A_{efgh} = \ldots = A_{cdeh} = a^2.$$

Aplicația 2. *Să se calculeze inducția magnetică a unui cîmp magnetic uniform care, printr-o suprafață plană de arie $A = 10\ m^2$ orientată sub un unghi de $\frac{\pi}{4}$ (45°) față de liniile de cîmp, produce un flux $\Phi = 3$ Wb.*

$$\Phi = BA \cos \alpha \Rightarrow B = \frac{\Phi}{A \cos \alpha} = \frac{3}{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}846 \text{ T}.$$

Aplicația 3. *Se consideră suprafața totală a unui cilindru circular drept. Prin una dintre baze intră fluxul $\Phi_1 = 0{,}03$ Wb, iar prin cealaltă iese $\Phi_2 = 0{,}01$ Wb. Ce flux revine suprafeței laterale și care este semnul acestuia?*

Din legea fluxului magnetic rezultă:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} = 0 \Rightarrow \Phi_{lat} = \Phi_1 - \Phi_2 = 0{,}03 - 0{,}01 = 0{,}02\ Wb > 0.$$

Fluxul Φ_{lat} fiind pozitiv, iese din suprafața laterală (fig. 1.24).



Fig. 1.24

B. CIRCUITE MAGNETICE. INDUCTIVITATE

1. Circuite magnetice

Se numesc **circuite magnetice** *ansamblurile de bobine cu miez de fier prin care se închid fluxurile magnetice.* În figura 1.25 este reprezentat circuitul magnetic al unui electromagnet. Transformatoarele și mașinile electrice oferă numeroase exemple de circuite magnetice.

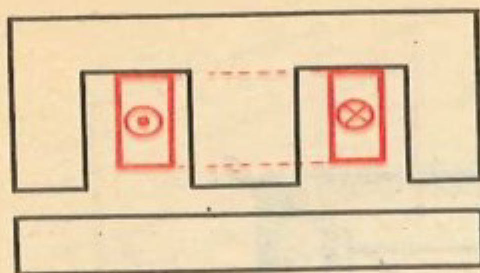


Fig. 1.25

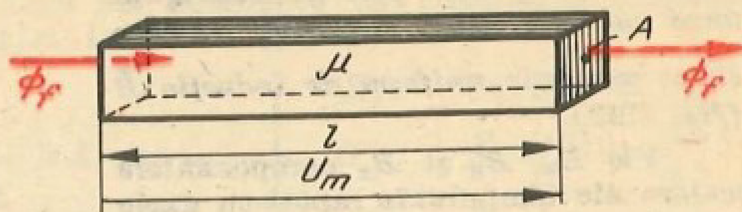


Fig. 1.26

2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic

• **Considerăm o porţiune neramificată de circuit magnetic, numită** *latură* (fig. 1.26). Fie l lungimea ei şi μ — permeabilitatea magnetică absolută a materialului ei. Fluxul magnetic care străbate o secţiune transversală a laturii se numeşte *flux fascicular* şi se notează cu Φ_f. Mai presupunem că inducţia magnetică este uniformă şi orientată numai în lungul laturii şi deci că nu există scăpări de flux prin suprafaţa laterală. Atunci fluxul fascicular prin orice secţiune transversală de arie A este acelaşi. Tensiunea magnetică din lungul laturii va fi

$$U_m = H \cdot l = \frac{B}{\mu} \cdot l = \frac{\Phi_f}{\mu A} \cdot l. \tag{1.19}$$

Mărimea

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \tag{1.20}$$

se numeşte *reluctanţa* laturii. Cu ajutorul reluctanţei, relaţia (1.19) se exprimă astfel

$$U_m = R_m \Phi_f \tag{1.21}$$

şi se numeşte *legea lui Ohm pentru latura de circuit magnetic* (aceasta — datorită asemănării ei formale cu legea lui Ohm pentru circuitele electrice: $U = RI$). Unitatea SI de reluctanţă este $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}$.

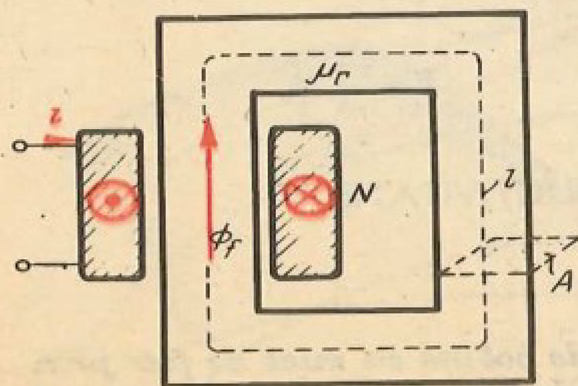


Fig. 1.27

• **Dacă latura formează un circuit închis înconjurat de o bobină cu** N **spire** parcurse de curentul i (fig. 1.27), aplicînd teorema lui Ampère obţinem:

$$U_{mm} = R_m \Phi_f = Ni,$$

de unde rezultă relaţia:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m}, \tag{1.22}$$

analoagă cu

$$I = \frac{E}{R},$$

care reprezintă *legea lui Ohm pentru un circuit închis* avînd t.e.m. E şi rezistenţa totală R.

Aplicaţia 1. *Să se calculeze fluxul fascicular într-o bobină cu circuit magnetic închis, avînd lungimea $l = 1$ m, $A = 0{,}01$ m² şi $\mu_r = 500$, ştiind că bobina de magnetizare are $N = 1\,000$ spire parcurse de curentul $i = 0{,}5$ A.*

$$R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0{,}01} = \frac{10^7}{20\pi} \frac{\text{A}}{\text{Wb}}; \quad Ni = 1\,000 \cdot 0{,}5 = 500 \text{ Asp};$$

$$\Phi_f = \frac{500}{10^7/20\pi} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = \pi \text{ mWb}.$$

Inducţia magnetică va fi:

$$B = \frac{\Phi_f}{A} = \frac{\pi \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}314 \text{ T}.$$

Aplicaţia 2. *Ce curent trebuie să alimenteze bobina din aplicaţia 1 pentru a se obţine o inducţie $B = 1$ T?*

$$\Phi_f = BA = 1 \cdot 10^{-2} = 10^{-2} \text{ Wb};$$

$$Ni = R_m \Phi_f = \frac{10^7}{20\pi} \cdot 10^{-2} = \frac{10^4}{2\pi} \text{ Asp};$$

$$i = \frac{Ni}{N} = \frac{10^4}{2\pi \cdot 10^3} = \frac{10}{2\pi} \text{ A}.$$

3. Teorema întîi a lui Kirchhoff pentru un nod de circuit magnetic

Se consideră un nod de circuit magnetic, adică un punct în care se ramifică mai multe laturi (fig. 1.28, *a*). Fie Φ_{f1}, Φ_{f2}, Φ_{f3} fluxurile magnetice fasciculare din laturile care formează nodul. Considerăm o suprafaţă închisă Σ care înconjoară nodul şi aplicăm legea fluxului magnetic acestei suprafeţe:

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{f1} + \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 \qquad (1.23)$$

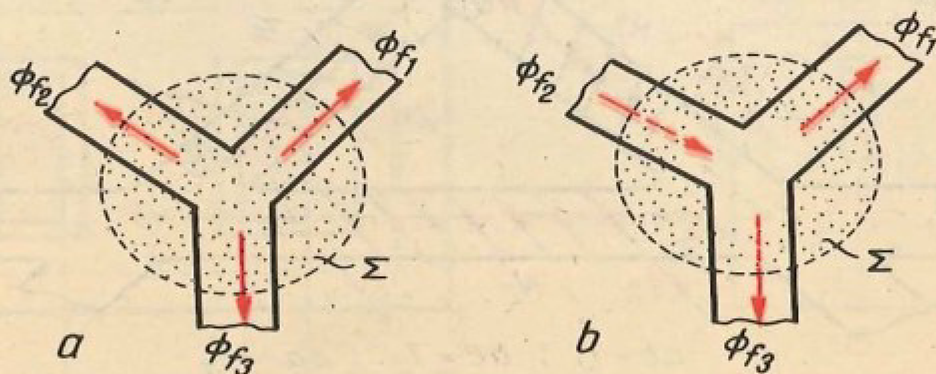


Fig. 1.28

Dacă fluxurile au sensul din figura 1.28, *b*, obținem

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0. \tag{1.24}$$

Aceste relații exprimă **teorema întîi a lui Kirchhoff pentru un nod de circuit magnetic**, care, în forma ei generală, se enunță astfel: *suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare ale laturilor ce converg într-un nod de circuit magnetic este nulă.* De regulă, fluxurile care ies din nod se consideră pozitive, iar cele care intră se consideră negative.

Aplicația 1. *În nodul din figura 1.28, a* $\Phi_{f1} = 0{,}1$ *Wb,* $\Phi_{f2} = 0{,}3$ *Wb. Să se calculeze* Φ_{f3}.

$$\Phi_{f3} = -\Phi_{f1} - \Phi_{f2} = -0{,}1 - 0{,}3 = -0{,}4 \text{ Wb}.$$

⊙ **Observație.** Fluxul Φ_{f3} intră în nod.

Aplicația 2. *În nodul din figura 1.28, b* $\Phi_{f1} = \Phi_{f2} = 0{,}05$ *Wb. Să se calculeze* Φ_{f3}.

$$\Phi_{f3} = \Phi_{f2} - \Phi_{f1} = 0{,}05 - 0{,}05 = 0 \text{ Wb}.$$

○ **Observație.** Prin latura *3* nu trece flux.

4. Teorema a doua a lui Kirchhoff

Considerăm o succesiune de laturi de circuit magnetic care formează un drum închis (un ochi) (fig. 1.29). Aplicînd teorema lui Ampère acestui drum închis obținem

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3$$

sau

$$U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3. \tag{1.25}$$

sau, ținînd seama de legea lui Ohm pentru fiecare latură,

$$R_{m1}\Phi_{f1} + R_{m2}\Phi_{f2} + R_{m3}\Phi_{f3} = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3. \tag{1.26}$$

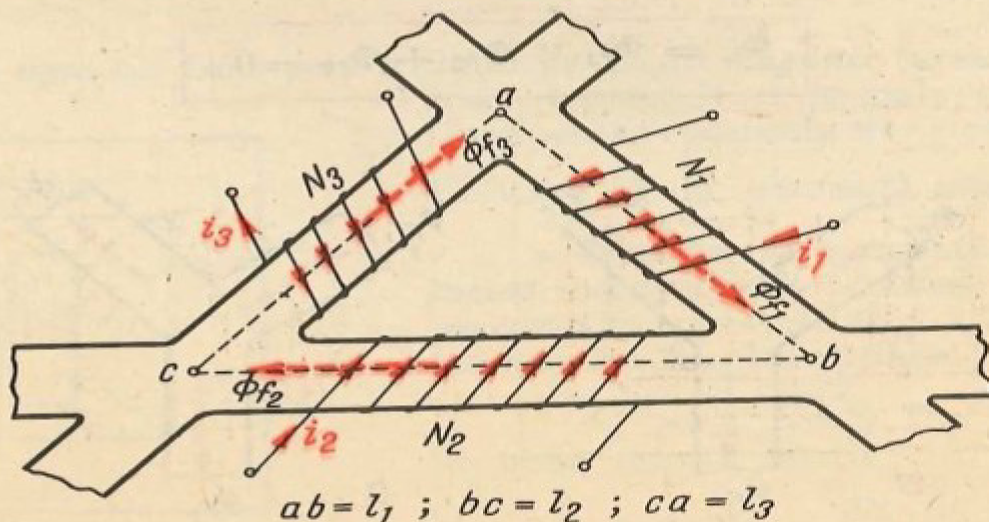


Fig. 1.29

Această relaţie exprimă **teorema a doua a lui Kirchhoff pentru un ochi de circuit magnetic**, care în forma ei generală se enunţă astfel: *suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din lungul laturilor unui ochi este egală cu suma algebrică a solenaţiilor bobinelor care înlănţuie laturile ochiului*. Căderile de tensiune şi solenaţiile care se întîlnesc în sens contrar sensului de parcurs se iau cu semnul minus (—).

Aplicaţia 1. *În ochiul din figura 1.29 se dau:* $U_{m1} = 500$ *Asp;* $U_{m2} = 800$ *Asp;* $U_{m3} = 200$ *Asp;* $N_1 i_1 = 2\,000$ *Asp;* $N_2 i_2 = 1\,000$ *Asp. Să se determine* $N_3 i_3$.

Din (1.25) rezultă:

$$N_3 i_3 = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} - N_1 i_1 - N_2 i_2 = 1\,500 - 3\,000 = -1\,500 \text{ Asp.}$$

⊙ **Observaţie.** Solenaţia fiind negativă, sensul curentului din bobina *3* trebuie inversat.

Aplicaţia 2. *Dacă* $N_2 i_2 = 1\,000$ *Asp, cît trebuie să fie* $N_1 i_1$ *pentru ca solenaţia* $N_3 i_3$ *să fie nulă?*

$$N_1 i_1 = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 1\,500 - 1\,000 - 0 = 500 \text{ Asp.}$$

Aplicaţia 3. *Ştiind că* $N_1 = 100$ *spire şi* $N_2 = 500$ *spire, să se determine curenţii din aplicaţia 2.*

$$i_1 = \frac{N_1 i_1}{N_1} = \frac{500}{100} = 5\text{A}; \quad i_2 = \frac{N_2 i_2}{N_2} = \frac{1\,000}{500} = 2\text{A}.$$

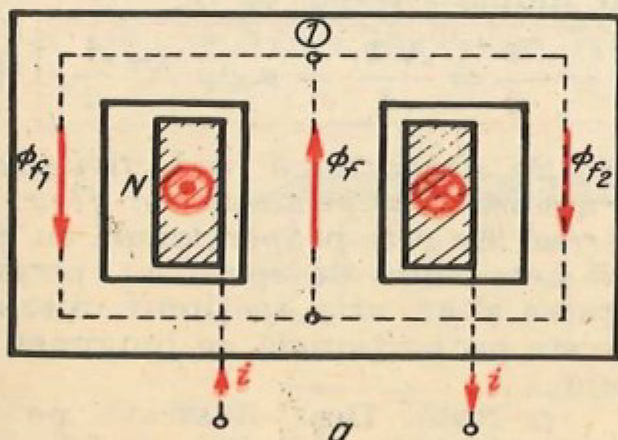
5. Analogia cu circuitele electrice

Rezolvarea circuitelor magnetice cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff se face la fel ca în cazul circuitelor electrice de c.c. (v. Electrotehnica cl. a X-a, cap. 3), pe baza următorului tabel de analogii (corespondenţe):

— flux magnetic fascicular Φ_f ⟷ curent electric I;
— tensiune magnetică U_m ⟷ tensiune electrică U;
— solenaţie Ni ⟷ t.e.m. E;
— reluctanţă R_m ⟷ rezistenţă R;
— permeabilitate μ ⟷ conductivitate σ.

Pe baza acestor analogii, fiecărui circuit magnetic i se asociază o schemă de circuit electric care se rezolvă cu metodele circuitelor de c.c.

Aplicaţia 1. *Se consideră circuitul magnetic din figura 1.30, a. Se cere să i se aplice teoremele lui Kirchhoff şi să se rezolve.*



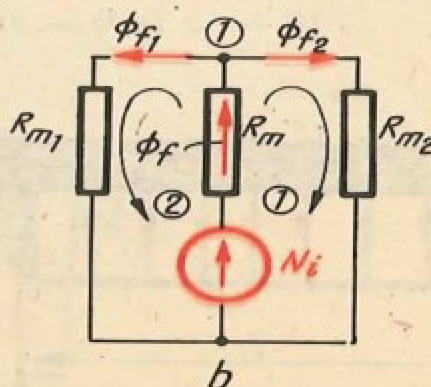


Fig. 1.30

Schema asociată de circuit electric este reprezentată în figura 1.30, *b*. Aplicînd teoremele lui Kirchhoff obținem:

$$\begin{cases} \Phi_{f1} + \Phi_{f2} - \Phi_f = 0 \text{ (nod } 1); \\ R_m\Phi_f + R_{m1}\Phi_{f1} = Ni \text{ (ochi } 1); \\ R_m\Phi_f + R_{m2}\Phi_{f2} = Ni \text{ (ochi } 2). \end{cases}$$

Dacă $R_{m1} = R_{m2}$, din rezolvarea sistemului se obține:

$$\Phi_f = \frac{2Ni}{R_{m1} + 2R_m}; \quad \Phi_{f1} = \Phi_{f2} = \frac{\Phi_f}{2} = \frac{Ni}{R_{m1} + 2R_m}.$$

Aplicația 2. *Se dau* $Ni = 5\,000$ *Asp*, $R_{m1} = 2R_m = R_{m2} = 20\,000$ *Asp/Wb. Să se afle fluxurile fasciculare.*

Se obține

$$\Phi_f = \frac{10\,000}{40\,000} = 0{,}25 \text{ Wb}; \quad \Phi_{f1} = \Phi_{f2} = \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125 \text{ Wb}.$$

6. Inductivitate

• **Inductivitatea unei bobine.** Considerăm un solenoid de lungime l, cu N spire parcurse de curentul i, bobinat pe un miez de permeabilitate relativă μ_r (fig. 1.31). Se numește *fluxul total al solenoidului* și se notează cu Φ fluxul ce străbate suprafețele spirelor sale:

$$\Phi = N\Phi_f.$$

Se numește *inductivitate* (sau *inductanță*) *a solenoidului* mărimea

$$L = \frac{\Phi}{i} \tag{1.27}$$

Fluxul fascicular al solenoidului rezultă din legea lui Ohm:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} = \frac{Ni}{\dfrac{l}{\mu_0\mu_r A}} = \mu_0\mu_r\, Ni\frac{A}{l},$$

iar inductivitatea va fi

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu_0\mu_r\, N^2\frac{A}{l}. \tag{1.28}$$

Se observă că *inductivitatea este o mărime independentă de flux și de curent.* Ea este proporțională cu pătratul numărului de spire, cu permeabilitatea și cu aria secțiunii miezului și invers proporțională cu lungimea acestuia.

○ **Notă.** Deși ilustrată pe cazul unui solenoid, definiția (1.27) inductivității este generală, fiind aplicabilă

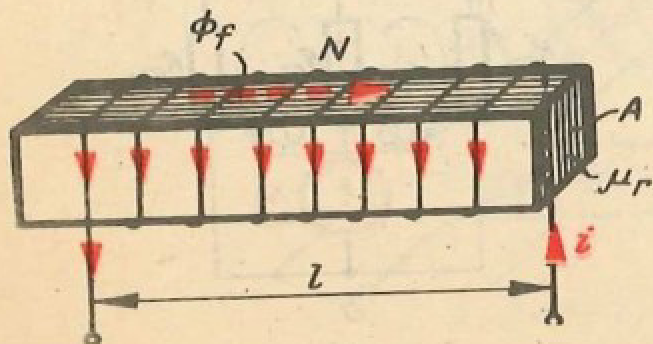


Fig. 1.31

pentru orice bobină. Formula de calcul este evident diferită de la caz la caz.

Unitatea de inductivitate se numeşte *henry* (H)

$$1 \text{ henry} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ amper}} = 1\frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \text{ H } (1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}).$$

Aplicaţia 1. *Să se calculeze inductivitatea unei bobine al cărei flux total este $\Phi = 0{,}3$ Wb, atunci cînd este parcursă de $i = 10$ A.*

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{0{,}3}{10} = 0{,}03 \text{ H} = 30 \text{ mH}.$$

Aplicaţia 2. *Să se calculeze inductivitatea unui solenoid avînd $N = 1\,000$ spire, $l = 1$ m, $A = 10$ cm², $\mu_r = 500$.*

$$L = \mu_0\mu_r N^2\frac{A}{l} = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500\cdot 1\,000^2\,\frac{10\cdot 10^{-4}}{1} = 0{,}628 \text{ H}.$$

Aplicaţia 3. *Inductivitatea unui solenoid cu miez de fier este $L = 0{,}5$ H. Dacă miezul se scoate, inductivitatea devine $L_0 = 0{,}025$ H. Să se calculeze μ_r.*

$$L = \mu_0\mu_r N^2\frac{A}{l};\quad L_0 = \mu_0\cdot N^2\frac{A}{l};\quad \frac{L}{L_0} = \mu_r = \frac{0{,}5}{0{,}025} = 200.$$

Aplicaţia 4. *Cîte spire ar trebui adăugate solenoidului din aplicaţia 3 fără miez de fier ca să aibă inductivitatea egală cu cazul în care are miez, ştiind că $N = 100$ spire?*

Fie N_1 acest număr. Scriem:

$$\mu_0\mu_r N^2\frac{A}{l} = \mu_0(N+N_1)^2\frac{A}{l} \Rightarrow \frac{(N+N_1)^2}{N^2} = \mu_r;$$

$$\frac{N+N_1}{N} = \sqrt{200};\quad 1+\frac{N_1}{100} = \sqrt{200};\quad N_1 = (\sqrt{200}-1)\,100 = 1\,314 \text{ sp.}$$

○ **Observaţie.** Se vede din acest exemplu cîtă importanţă are miezul de fier pentru obţinerea unei inductivităţi mari. Lipsa sa este echivalentă cu creşterea de peste 13 ori a numărului de spire.

● **Inductivităţi proprii şi mutuale.** Considerăm două bobine înfăşurate pe acelaşi miez de lungime l, secţiune A şi permeabilitate $\mu = \mu_0\mu_r$, avînd N_1, respectiv N_2 spire (fig. 1.32) şi alimentate de curenţii i_1 şi i_2. Fie Φ_{f1} şi Φ_{f2} fluxurile fasciculare ce se stabilesc în miezul de fier. Fluxurile totale vor fi respectiv

$$\Phi_{11} = N_1\Phi_{f1} \text{ şi } \Phi_{21} = N_2\Phi_{f1} \text{ (dacă } i_2 = 0 \text{ şi } i_1 \neq 0)$$

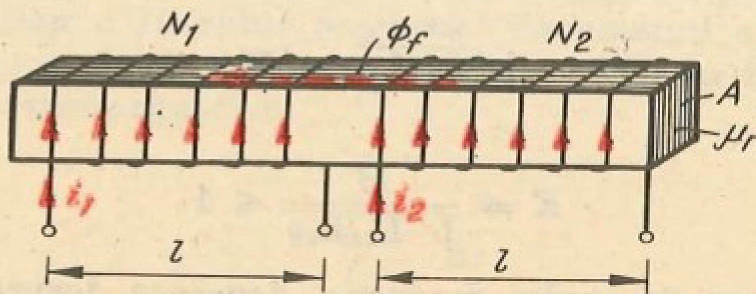


Fig. 1.32

şi

$$\Phi_{12} = N_1 \Phi_{f2} \text{ şi } \Phi_{22} = N_2\Phi_{f2} \text{ (dacă } i_1 = 0 \text{ şi } i_2 \neq 0).$$

Se numesc **inductivităţi proprii** ale bobinelor mărimile:

$$\boxed{L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1}} \qquad (1.29,\ a)$$

$$\boxed{L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2}} \qquad (1.29,\ b)$$

Se numesc **inductivităţi mutuale** ale bobinelor mărimile:

$$\boxed{L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}} \qquad (1.30,\ a)$$

$$\boxed{L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}} \qquad (1.30,\ b)$$

Inductivităţile mutuale se măsoară ca şi cele proprii în *henry* (H). Observînd că

$$\Phi_{f1} = \mu \frac{N_1 i_1}{l} A \text{ şi } \Phi_{f2} = \mu \frac{N_2 i_2}{l} A,$$

din formulele de definiţie (1.29) şi (1.30) obţinem

$$\boxed{L_{11} = \mu \frac{N_1^2}{l} A;\ L_{22} = \mu \frac{N_2^2}{l} A \text{ şi } L_{12} = L_{21} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} A.} \qquad (1.30,\ c)$$

Se mai notează $M = L_{12} = L_{21}$.

○ **Notă.** Aceste relaţii de calcul sînt valabile numai pentru solenoizi; formulele de definiţie (1.29) — (1.30) sînt însă valabile în general.

Observăm că *în cazul solenoizilor*

$$L_{11}L_{22} = L_{12}^2 = M^2 \Rightarrow \sqrt{L_{11}L_{22}} = M.$$

În general:

$$\sqrt{L_{11}L_{22}} > M.$$

Raportul

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \leqslant 1 \qquad (1.31)$$

se numeşte *coeficient de cuplaj magnetic* deoarece despre bobinele care au inductivitate mutuală se spune că sînt cuplate magnetic. Atunci cînd $K = 1$ se spune că bobinele sînt cuplate perfect.

• **Relațiile lui Maxwell pentru inductivități.** Dacă bobinele sînt parcurse simultan de curenții i_1 și i_2, fluxurile trebuie însumate. Se obține

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 ;$$
$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 . \quad (1.32)$$

Acèste relații se numesc relațiile lui Maxwell pentru inductivități.

Aplicația 1. *Să se calculeze inductivitățile proprii și mutuale pentru doi solenoizi cu miez comun avînd $N_1 = 100$ spire, $N_2 = 1\,000$ spire, $A = 10$ cm², $l = 1$ m și $\mu_r = 100$.*

$$L_{11} = \mu_0\mu_r N_1^2 \frac{A}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^4 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1} = 1,256 \cdot 10^{-3} \text{ H};$$

$$L_{22} = \mu_0\mu_r N_2^2 \frac{A}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^6 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1} = 1,256 \cdot 10^{-1} \text{ H};$$

$$M = L_{12} = L_{21} = \mu_0\mu_r N_1N_2 \frac{A}{l} = 4\pi\ 10^{-7} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 1\,000 \frac{10 \cdot 10^{-4}}{l} = 1,256 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

Se observă că $M = \sqrt{L_{11}L_{22}}$, deci $K = 1$.

Aplicația 2. *Două bobine cuplate magnetic au $L_{11} = 0,05$ H, $L_{22} = 0,2$ H și coeficientul de cuplaj $K = 0,3$. Să se determine M.*

$$M = K\sqrt{L_{11}L_{22}} = 0,3 \cdot \sqrt{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1}} = 0,3 \cdot 10^{-1} = 0,03 \text{ H}.$$

Aplicația 3. *Să se calculeze fluxurile totale prin cele două bobine din aplicația 2, știind că $i_1 = 1$ A și $i_2 = 0,2$ A, sensurile curenților fiind alese astfel încît fluxurile lor să se adune.*

Aplicăm relațiile lui Maxwell (1.32):

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 = 0,05 \cdot 1 + 0,03 \cdot 0,2 = 0,056 \text{ Wb};$$
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 = 0,03 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,07 \text{ Wb}.$$

C. ELECTROTEHNICA FENOMENELOR DE INDUCȚIE ELECTROMAGNETICĂ

1. Legea inducției electromagnetice

Se numește fenomen de **inducție electromagnetică** *producerea unei t.e.m. prin variația în timp a fluxului magnetic.* Fenomenul a fost descoperit de marele fizician englez *Michael Faraday* (1791—1867) în 1831. El a formulat **legea inducției electromagnetice**

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (1.33)$$

unde fluxul Φ și t.e.m. e au sensuri de referință asociate după regula burghiului (fig. 1.33).

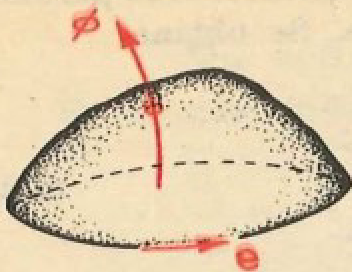


Fig. 1.33

Enunţul legii este următorul: *tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur închis este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin suprafaţa conturului* *.

Dacă conturul este conductor, de exemplu o spiră închisă sau o bobină formată din mai multe spire, în el se produce un curent $i = \frac{e}{R}$, care se numeşte *curent de inducţie* (curent indus).

Sensul curentului indus este dat de o regulă formulată de H.F.E. Lenz în 1833.

Regula spune: *curentul indus are un astfel de sens încît, prin cîmpul magnetic pe care-l produce, se opune variaţiei în timp a fluxului magnetic inductor.*

Variaţia fluxului magnetic se poate produce fie datorită variaţiei în timp a cîmpului magnetic *(fenomen de inducţie electromagnetică prin transformare)*, fie datorită mişcării sau deformării conturului într-un cîmp constant *(fenomen de inducţie electromagnetică prin mişcare)*, fie pe ambele căi.

2. Inducţia electromagnetică prin transformare

• **Considerăm un solenoid** avînd N spire străbătute de fluxul fascicular $\Phi_f(t)$. T.e.m. indusă în conturul format din cele N spire va fi

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(N\Phi_f)}{\Delta t} = -N\frac{\Delta\Phi_f}{\Delta t}. \qquad (1.34)$$

Aplicaţie. *Fie $N = 100$ spire şi presupunem că fluxul fascicular scade uniform de la $\Phi_f = 0{,}1$ Wb la zero în 10 s. Să se afle t.e.m. indusă.*

---

* În relaţia (1.33) intervine raportul $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, care exprimă viteza medie de variaţie a fluxului în intervalul de timp $(t;\ t + \Delta t)$ cu durata arbitrară Δt. Această mărime este în general dependentă de momentul t şi de durata Δt a intervalului.

Dacă durata Δt se consideră arbitrar de mică (tinde către zero), raportul respectiv devine independent de Δt şi defineşte ceea ce numim viteză instantanee de variaţie a mărimii considerate la momentul t. Matematic scriem:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt},$$

unde raportul $\frac{d\Phi}{dt}$ se numeşte *derivată a funcţiei* $\Phi = \Phi(t)$ în raport cu variabila t.

Pentru tehnică prezintă interes mai ales *mărimile cu variaţie sinusoidală în timp*, de exemplu:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t.$$

Derivata acestei funcţii este

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \cos \omega t}$$

Dacă variaţia în timp este de forma $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$ derivata este

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\Phi_m \sin \omega t}$$

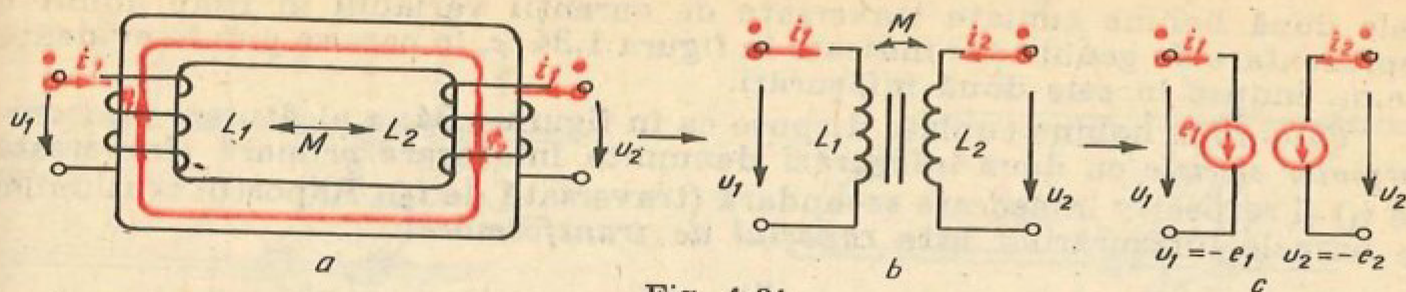


Fig. 1.34

Vom găsi:

$$e = -N\frac{\Delta\Phi_f}{\Delta t} = -100\,\frac{0-0,1}{10} = +1\ \text{V}.$$

● **Considerăm două bobine cuplate** situate pe acelaşi miez magnetic, avînd inductivităţile proprii $L_{11} = L_1$ şi $L_{22} = L_2$ şi inductivitatea mutuală $L_{12} = L_{21} = M$ (fig. 1.34, *a*). Presupunem bobinele traversate de curenţii variabili în timp i_1 şi i_2, care determină în miezul magnetic comun cîmpuri magnetice în acelaşi sens (cuplaj adiţional). Fluxurile magnetice, prin spirele celor două înfăşurări, cu sensuri de referinţă asociate după regula burghiului cu sensurile curenţilor respectivi, sînt date de relaţiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 = L_1i_1 + Mi_2; \\ \Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{12}i_2 = Mi_1 + L_2i_2. \end{cases}$$

Deoarece pentru curenţi variabili în timp fluxurile magnetice sînt variabile în timp, în spire se vor induce t.e.m.

$$e_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} \text{ şi } e_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} \tag{1.35, a}$$

unde sensurile t.e.m. în cele două înfăşurări coincid cu sensurile curenţilor. Înlocuind cu aceste relaţii fluxurile Φ_1 şi Φ_2, obţinem:

$$\begin{cases} e_1 = -L_1\frac{\Delta i_i}{\Delta t} - M\frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{11} + e_{12}; \\ e_2 = -M\frac{\Delta i_i}{\Delta t} - L_2\frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{21} + e_{22}. \end{cases}$$

T.e.m. e_{11} şi e_{22} determinate de variaţia în timp a curenţilor proprii ai celor două bobine se numesc *t.e.m. de autoinducţie*; t.e.m. e_{12} şi e_{21} determinate în fiecare bobină de variaţia în timp a curentului din cealaltă bobină se numesc *t.e.m. de inducţie mutuală*. Dacă u_1 şi u_2 sînt tensiunile la bornele bobinelor, cu sensuri de referinţă asociate cu cele ale curenţilor după regula utilizată pentru receptoare, şi dacă conductoarele bobinelor au rezistenţe neglijabile, putem scrie:

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 = L_1\frac{\Delta i_i}{\Delta t} + M\frac{\Delta i_2}{\Delta t}; \\ u_2 = -e_2 = M\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + L_2\frac{\Delta i_2}{\Delta t}. \end{cases} \tag{1.35, b}$$

În schemele electrice, bobinele cuplate din figura 1.34, *a* se reprezintă ca în figura 1.34, *b* unde cu un punct roşu s-a indicat pentru fiecare bobină borna de intrare a curentului pentru care cîmpurile magnetice au acelaşi sens în circuitul magnetic comun (acestea sînt *bornele* denumite *polarizate*).

Cele două bobine cuplate traversate de curenţii variabili în timp admit o reprezentare de genul celei indicate în figura 1.34, *c*, în care se pun în evidenţă t.e.m. induse în cele două înfăşurări.

Cele două bobine cuplate dispuse ca în figura 1.34, *a* alcătuiesc un *transformator electric* cu două înfăşurări denumite înfăşurare primară (traversată de i_1) şi respectiv înfăşurare secundară (traversată de i_2). Raportul tensiunilor la bornele înfăşurărilor este *raportul de transformare*:

$$\frac{u_1}{u_2} = n$$

Deci utilizînd pentru inductanţele L_{11}, L_{22} şi $L_{12} = L_{21} = M$ relaţiile 1.30, *c*, obţinem pentru *n* expresia:

$$n = \frac{N_1^2 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_1 N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}}{N_1 N_2 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2^2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}} = \frac{N_1\left[\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}\right]}{N_2\left[\frac{\Delta i_1}{\Delta t} + N_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t}\right]} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Obţinem deci:

$$\boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n} \qquad (1.35, c)$$

Aplicaţia 1. *Să se determine t.e.m. de autoinducţie şi de inducţie mutuală în două bobine cuplate magnetic, avînd $L_{11} = 0,1$ H; $L_{22} = 0,05$ H; $L_{12} = L_{21} = M = 0,01$ H, ştiind că iniţial curenţii din bobine sînt $i_1 = 5$ A şi $i_2 = 10$ A şi scad uniform la zero în 0,1 s.*

Scriem:

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = \frac{0 - 5}{0,1} = -50\,\frac{\text{A}}{\text{s}}; \quad \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{0,1} = -100\,\frac{\text{A}}{\text{s}}.$$

Aplicînd relaţiile (1.35) obţinem:

$$e_1 = e_{11} + e_{12} = 0,1 \cdot 50 + 0,01 \cdot 100 = 5 + 1 = 6 \text{ V};$$

$$e_2 = e_{21} + e_{22} = 0,01 \cdot 50 + 0,05 \;\; 100 = 0,5 + 5 = 5,5 \text{ V}.$$

○ **Observaţie.** Aceste t.e.m. sînt constante numai în timpul scăderii curenţilor, adică timp de 0,1 s.

Aplicaţia 2. *Într-o bobină avînd $L = 0,05$ H, intensitatea curentului creşte uniform de la zero la $I = 10$ A în timp de 10 s. Care este t.e.m. de autoinducţie?*

$$e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{10} = 1\,\frac{\text{A}}{\text{s}};$$

$$e = -0,05 \cdot 1 = -0,05 \text{ V}.$$

○ **Se observă că** t.e.m. fiind negativă, are tendinţa de a produce un curent negativ, care se opune creşterii curentului *(regula lui Lenz)*.

Aplicaţia 3. *În bobina din aplicaţia 2 se induce o t.e.m. $e = -0,1$ V = const. Ştiind că iniţial curentul este nul, se cere să se determine valoarea sa după 15 s.*

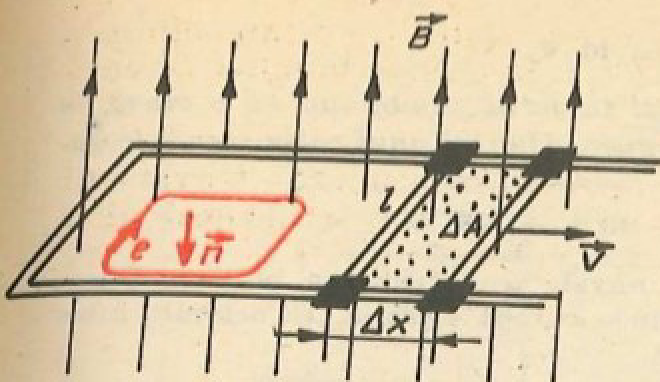
$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{e}{L} = \frac{0,1}{0,05} = 20\,\frac{\text{A}}{\text{s}} = const.$$

Dacă curentul creşte cu 20 A/s, atunci după 15 s el va fi:

$$i_{15} = 20 \text{ A/s} \cdot 15 \text{ s} = 300 \text{ A}.$$

3. Inducţia electromagnetică prin mişcare

● Considerăm o bară conductoare care alunecă cu viteza $\vec{v}$ pe două şine paralele conductoare într-un **cîmp magnetic uniform** de inducţie $\vec{B}$,



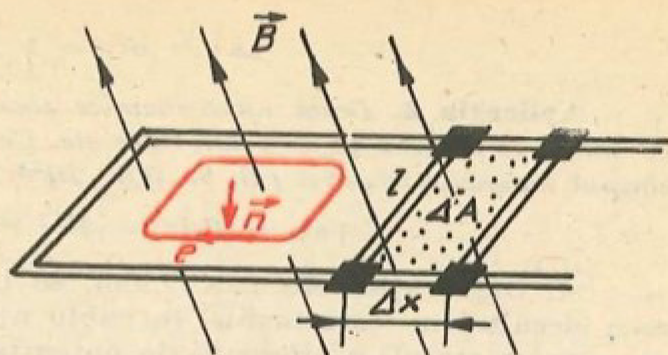


Fig. 1.35

perpendicular pe planul şinelor (fig. 1.35, *a*). Inducţia magnetică este constantă în timp.

Fluxul magnetic prin suprafaţa conturului dreptunghiular format de şine şi bară variază în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ cu

$$\Delta\Phi = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t).$$

Pentru sensul de referinţă din figură, variaţia fluxului este

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\, A(t + \Delta t) - \vec{B}\vec{n}\, A(t),$$

$A(t)$ **şi** $A(t + \Delta t)$ **fiind aria suprafeţei traversate de flux la momentele respective de timp.**

Deoarece $\vec{B}$ **are orientare opusă sensului de referinţă, fluxul prin suprafaţa respectivă este negativ şi deci:**

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\, \Delta A = -Bl\Delta x = -Blv\Delta t.$$

Conform legii inducţiei electromagnetice, în contur se induce o t.e.m.

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

unde sensul de referinţă al t.e.m. este asociat cu cel al fluxului după regula burghiului (v. fig. 1.35, *a*).

Rezultă în final o t.e.m.

$$e = -\frac{-Blv\Delta t}{\Delta t} = Blv$$

Această t.e.m. produce în conturul conductor respectiv un curent care, prin cîmpul magnetic pe care-l generează (opus cîmpului inductor), se opune variaţiei în timp a fluxului (în cazul de faţă — creşterii fluxului).

● **În cazul cînd inducţia nu este normală pe suprafaţa conturului,** variaţia de flux va fi (fig. 1.35, *b*):

$$\Delta\Phi = \vec{B}\vec{n}\ \Delta A = B\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\Delta A = Blv\ \Delta t\ \sin\alpha.$$

iar t.e.m. indusă prin mişcare va fi:

$$e = +Blv\sin\alpha. \qquad (1.37)$$

Aplicaţia 1. *Să se calculeze t.e.m. în conductorul unei maşini electrice avînd lungimea $l = 1$ m, care se mişcă cu $v = 10$ m/s într-un cîmp normal pe conductor şi viteză, avînd $B = 1$ T.*

$$|e| = Blv = 1 \times 1 \times 10 = 10 \text{ V}.$$

Aplicația 2. *Două nave cosmice zboară în paralel în jurul pămîntului cu o viteză de 10 km/s, la o distanță de 1 km între ele. Ce t.e.m. va induce, în lungul unui cablu care le leagă, cîmpul magnetic terestru ($B_t = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ T)?*

$$|e| = B_t lv = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 500 \text{ V}.$$

○ **Observație.** Această t.e.m. se induce cînd navele trec deasupra polilor. Deoarece circuitul nu este închis, în cablu nu se va produce curent electric. În schimb, între nave se va stabili o diferență de potențial de 500 V.

Aplicația 3. *Viteza medie a apelor Dunării este de 0,5 m/s. Ce t.e.m. se va induce între două maluri distanțate la 1 km, în cîmpul magnetic terestru ($B_t = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ T)?*

$$|e| = Blv_{med} = 0{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}015 \text{ V} = 15 \text{ mV}.$$

○ **Observație.** Pe această cale *M. Faraday* a încercat să măsoare viteza medie a apelor fluviului Tamisa.

D. ENERGIA MAGNETICĂ ȘI FORȚELE MAGNETICE

1. Energia magnetică

Deoarece cîmpul magnetic exercită forțe magnetice și poate produce lucru mecanic, trebuie să admitem că acest cîmp este capabil să acumuleze energie pe care s-o poată cheltui pentru producerea lucrului mecanic. Această energie se numește *energie magnetică*.

Încercăm să găsim o expresie a energiei magnetice acumulate într-o bobină. În acest scop, considerăm o bobină ideală (adică cu rezistență nulă) avînd inductivitatea L. Bobina este alimentată începînd de la un moment dat, $t = 0$, de o sursă de curent $i(t)$ (fig. 1.36) care crește liniar cu timpul. Ne fixăm atenția asupra unui interval de timp $(0; T)$, în care curentul crește liniar de la $i(0) = 0$ la $i(T) = I$ (fig. 1.37, *a*). Această variație în timp a curentului va produce o t.e.m. de autoinducție

$$e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{I - 0}{T - 0} = -L\frac{I}{T}.$$

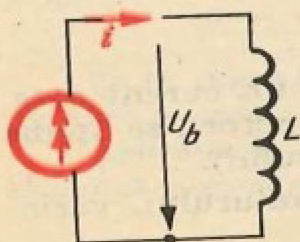


Fig. 1.36

Bobina se comportă deci ca o sursă de t.e.m. la bornele căreia se stabilește tensiunea (fig. 1.37, *b*)

$$U_b = -e = L\frac{I}{T} = const. \quad (1.38)$$

La un moment dat $t_k \in (0; T)$, bobina va absorbi puterea

$$p_k = U_b i(t_k),$$

iar energia absorbită în intervalul Δt_k va fi:

$$\Delta W_k = p_k \Delta t_k = U_b i(t_k) \Delta t_k.$$

Energia totală absorbită în intervalul $(0; T)$ va fi

$$W = \sum_{(k)} \Delta W_k = \sum_{(k)} U_b i(t_k) \Delta t_k = U_b \sum_{(k)} i(t_k) \Delta t_k. \quad (1.39)$$

Dar $i(t_k)\Delta t_k$ reprezintă aria dreptunghiului elementar hașurat în figura 1.37, *a*.

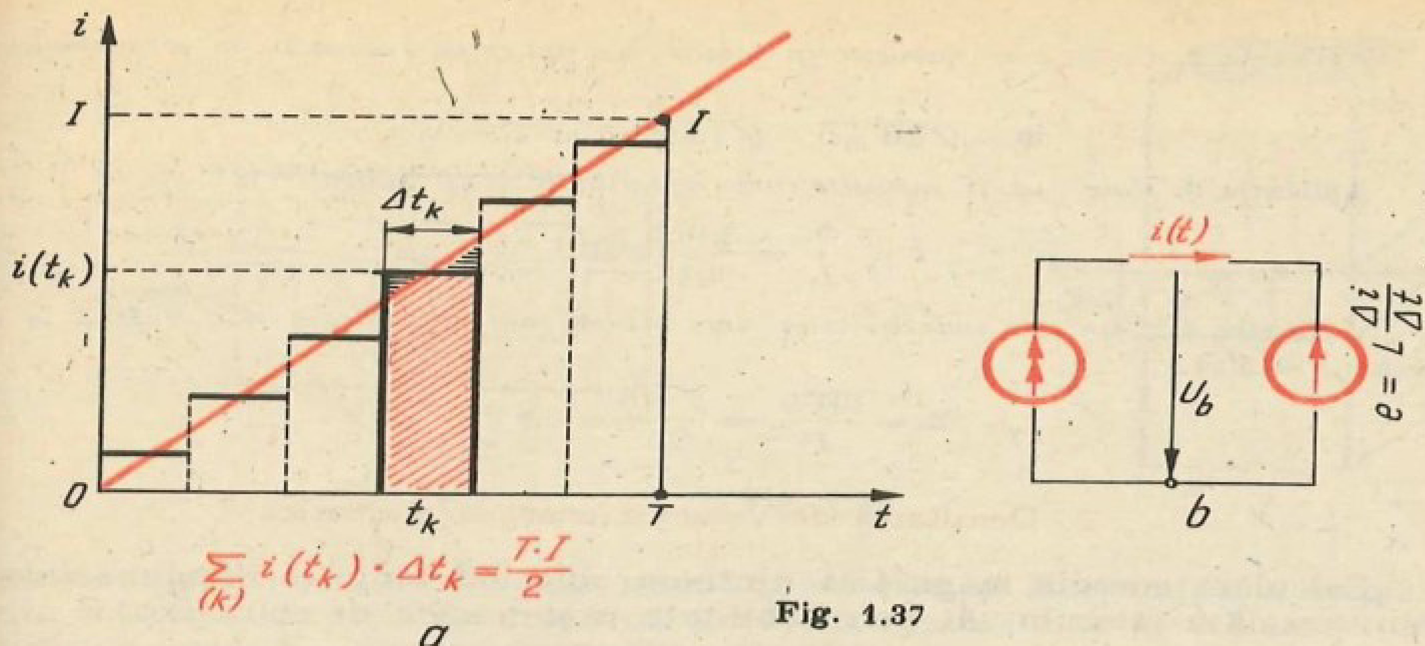


Fig. 1.37

Deci suma din expresia de mai sus va fi suma ariilor tuturor dreptunghiurilor din intervalul (0; T), adică aria triunghiului OTI:

$$\sum_k i(t_k)\Delta t_r = A_{OTI}=\frac{TI}{2}.$$

Revenind în expresia (1.39), obţinem cu (1.38)

$$W = U_b\frac{TI}{2} = L\frac{I}{T}\cdot\frac{TI}{2} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Fiind primită de la o sursă şi nedisipată în interiorul bobinei deoarece aceasta are rezistenţă nulă, această energie este acumulată integral în cîmpul magnetic al bobinei; deci

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{1.40}$$

Alegînd drept I oricare dintre valorile $i(t)$ şi ţinînd seama că:

$$\Phi = Li,$$

obţinem următoarele expresii echivalente ale energiei magnetice acumulate în bobină:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\Phi i = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} \tag{1.41}$$

○ **Notă.** Deşi au fost deduse pentru o bobină ideală, *expresiile (1.41) ale energiei magnetice sînt valabile în general, adică pentru orice fel de bobină şi orice fel de variaţie a curentului*, ele depinzînd numai de valorile fluxului magnetic şi intensităţii curentului la un moment dat.

Aplicaţia 1. *Să se determine energia magnetică dintr-o bobină cu $L = 0,1$ H, parcursă de $I = 10$ A.*

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = 0,1\cdot\frac{10^2}{2} = 5\text{J}.$$

Aplicaţia 2. *Ce flux se stabileşte în bobina din aplicaţia 1 dacă în ea se acumulează 50 J?*

$$\Phi = \sqrt{2W_m L} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1} = 3{,}16 \text{ Wb}.$$

Aplicaţia 3. *Care va fi intensitatea curentului în cazul aplicaţiei 2?*

$$I = \frac{\Phi}{L} = \frac{3{,}16}{0{,}1} = 31{,}6 \text{ A}.$$

Aplicaţia 4. *Care este inductivitatea unei bobine care acumulează $W_m = 10$ J la un curent $I = 5$ A?*

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2 \cdot 10}{25} = 0{,}8 \text{ H}.$$

2. Densitatea de volum a energiei magnetice

Calculăm energia magnetică dintr-un solenoid lung, de lungime l, arie transversală a miezului A, permeabilitate μ şi număr de spire N:

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}.$$

Dar $\Phi = NBA$; $L = \mu\dfrac{N^2A}{l}$ şi deci

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{N^2B^2A^2}{\mu\dfrac{N^2A}{l}} = \frac{B^2}{2\mu}Al = \frac{B^2}{2\mu}V,$$

unde $V = Al$ este volumul miezului solenoidului.

Se numeşte **densitate de volum a energiei magnetice** *energia magnetică raportată la unitatea de volum*:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Deoarece $B = \mu H$, obţinem şi următoarele expresii echivalente:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2} = \mu\frac{H^2}{2} \qquad (1.42)$$

Aplicaţia 1. *Să se determine densitatea de volum a energiei magnetice pentru un cîmp $B = 1$ T în vid.*

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{10^7}{8\pi} = 3{,}97 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3.$$

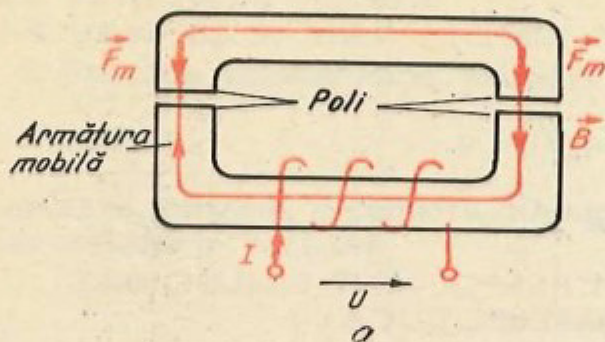
Aplicaţia 2. *Care va fi densitatea de energie pentru acelaşi cîmp într-un mediu cu $\mu_r = 397$?*

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} = \frac{3{,}97 \cdot 10^5}{397} = 10^3 \text{ J/m}^3.$$

○ **Observaţie.** În raport cu capacitatea cîmpului electric de a acumula energie, capacitatea cîmpului magnetic este cu mult mai mare la valorile uzuale ale inducţiei care se obţin în tehnică.

3. Forţa magnetică

Considerăm electromagnetul din figura 1.38, *a*, în care o porţiune a circuitului magnetic, denumită *armătură mobilă*, se poate deplasa. Fie *d* lun-



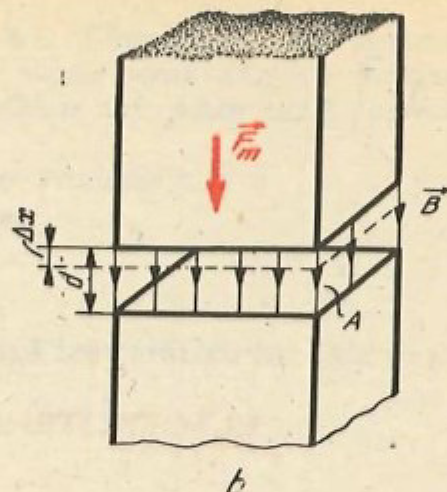


Fig. 1.38

gimea interstițiului dintre poli, numit și *întrefier*, și B — inducția magnetică din întrefier. Experiența arată că armătura mobilă este atrasă înspre polul fix cu o forță F_m, pe care vrem să o calculăm.

Lucrul mecanic elementar efectuat la o deplasare Δx în jos (fig. 1.38, *b*) va fi efectuat pe seama energiei magnetice a cîmpului din întrefier, care va scădea odată cu descreșterea întrefierului:

$$F_m \Delta x = \frac{B^2}{2\mu} A \cdot \Delta x = -\Delta W_m$$

(energia scade datorită micșorării volumului: $\Delta W_m = W_{m\,final} - W_{m\,inițial} =$

$$= \frac{B^2}{\mu 2_0} A(d - \Delta x) - \frac{B^2}{2\mu_0} A \cdot d = -\frac{B^2 A}{2\mu_0} \Delta x.$$

Împărțind cu Δx, obținem

$$F_m = -\frac{\Delta W_m}{\Delta x} = \frac{B^2}{2\mu_0} A. \quad (1.43)$$

Forța dată de relația (1.43) poartă numele de *forță portantă* a electromagneților.

Aplicația 1. *Să se calculeze forța portantă a unui electromagnet avînd $A = 1$ dm² și $B = 1$ T.*

$$F_m = \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{1^2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 3{,}97 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Aplicația 2. *Să se determine inducția magnetică de sub polul unui electromagnet capabil să dezvolte o forță de 5 000 N, avînd aria 3 dm².*

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 F_m}{A}} = \sqrt{\frac{8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}}} = 0{,}647 \text{ T}.$$

Aplicația 3. *Să se determine aria polului unui electromagnet care la inducția $B = 1{,}5$ T dezvoltă o forță portantă de 10 000 N.*

$$A = \frac{2\mu_0 F_m}{B^2} = \frac{8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4}{2{,}25} = 1{,}12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 1{,}12 \text{ dm}^3.$$

○ **Notă.** Aplicațiile arată că *forțele magnetice sînt importante la valori uzuale ale inducției obținute în tehnică.* De aceea, electromagneții se utilizează chiar pentru realizarea unor macarale electromagnetice.

Capitolul 2

ELECTROTEHNICA REGIMULUI PERMANENT SINUSOIDAL AL CIRCUITELOR ELECTRICE

A. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM VARIABIL

1. Elemente de circuit pasive

Rezistorul, bobina şi condensatorul sînt elemente dipolare pasive de circuit. Vom asocia atunci sensul tensiunii u aplicate la borne sensului curentului i cu regula de la receptoare (fig. 2.1).

În regim variabil, tensiunea şi curentul sînt mărimi variabile în timp. S-a notat cu litera mică a simbolului mărimii respective valoarea pe care acea mărime o are la un moment oarecare t, adică *valoarea sa instantanee*.

Produsul dintre tensiunea instantanee la borne şi curentul instantaneu se numeşte *putere instantanee:*

$$p = ui. \tag{2.1}$$

a. Rezistorul ideal

● **Tensiunea la bornele unui rezistor ideal** este proporţională cu intensitatea curentului:

$$\boxed{u_R = Ri} \tag{2.2}$$

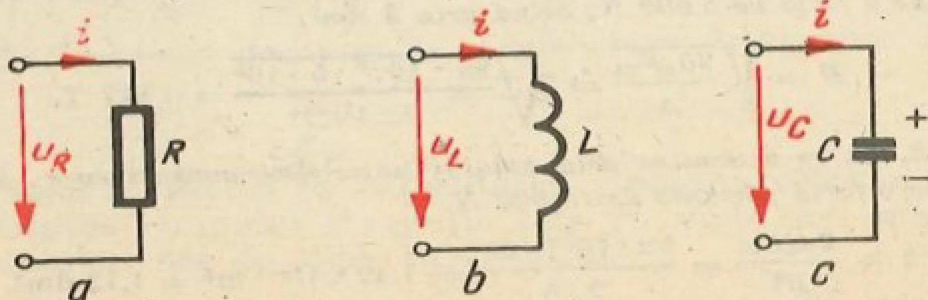


Fig. 2.1

unde R este rezistenţa rezistorului ideal (fig. 2.1, *a*). Tensiunea la borne urmăreşte instantaneu variaţia în timp a curentului. Vom constata că *rezistorul ideal este singurul element pentru care legea lui Ohm îşi păstrează forma din c.c. şi în regim variabil.*

Mărimea u_R se mai numeşte *cădere de tensiune rezistivă.*

• **Puterea instantanee primită pe la borne este:**

$$p = u_R i = Ri^2 \geqslant 0.$$

Prin urmare, puterea p primită din exterior se transformă ireversibil în căldura Ri^2 dezvoltată în rezistor.

b. *Bobina ideală*

• **Tensiunea la bornele bobinei ideale** *este proporţională cu viteza de creştere în timp a curentului:*

$$u_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \text{(v. cap. 1, subcap. C.1 — notă)}, \tag{2.3}$$

unde L este inductivitatea bobinei. Mărimea u_L se mai numeşte *cădere de tensiune inductivă.*

• **La limită, pentru $\Delta t \to 0$ ecuaţia de circuit este:**

$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}}. \tag{2.3'}$$

Ea se obţine prin aplicarea legii inducţiei electromagnetice. Fluxul $\Phi = Li$ prin bobină este variabil în timp, astfel că se induce tensiunea electromotoare $e = -d\Phi/dt$. Pentru o bobină ideală, rezistenţa este neglijabilă şi nu există cădere de tensiune rezistivă. T.e.m. indusă este atunci egală, în modul, cu căderea de tensiune la bornele bobinei. Ţinînd cont şi de sensul t.e.m. induse, se obţine $e = -u_L$, deoarece curentul este asociat tensiunii la borne după regula de la receptoare (fig. 2.1, *b*). Prin urmare,

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L\frac{di}{dt}.$$

• **Puterea instantanee** are expresia

$$p = u_L i = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{dW_m}{dt} \gtrless 0, \text{ deoarece}$$

energia magnetică a unei bobine are expresia

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 \text{ (v. cap. 1, rel. 1.41)}.$$

Bobina ideală *are proprietatea ca toată energia electrică pe care o absoarbe pe la borne să o acumuleze sub formă de energie magnetică.*

⊙ **Observaţie.** Procesul este reversibil: energia magnetică acumulată poate fi restituită integral pe la borne, sub formă de energie electromagnetică. Prin urmare, *o bobină nu creează energie, ci doar o schimbă cu exteriorul.*

Bobina schimbă instantaneu puterea electromagnetică cu exteriorul. ***Cînd $p > 0$,* bobina primește energie și energia magnetică acumulată crește. *Dacă $p < 0$,* bobina cedează energie și energia magnetică acumulată descrește.**

c. *Condensatorul ideal*

• **Intensitatea curentului prin condensatorul ideal** ***este proporțională cu viteza de creștere în timp a tensiunii aplicate la borne:***

$$i = C\frac{\Delta u_C}{\Delta t}, \tag{2.4}$$

unde C este capacitatea condensatorului.

• **La limită, pentru $\Delta t \to 0$ ecuația de circuit este**

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}} \tag{2.4'}$$

Ea se obține prin aplicarea legii de conservare a sarcinii electrice.

Deoarece sarcina $q = Cu_C$ pe armăturile condensatorului este variabilă în timp, prin condensator va trece curentul

$$i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cu_C) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

În aplicarea legii s-a ținut seama că, în raport cu sensurile asociate după regula de la receptoare, curentul iese din armătura încărcată negativ (fig. 2.1, *c*).

• Pentru un condensator ideal, **puterea instantanee** este

$$p = u_C i = u_C C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} \gtrless 0,$$

deoarece energia acumulată în cîmpul electric al unui condensator este

$$W_e = \frac{1}{2}Cu_C^2.$$

Condensatorul ideal *are proprietatea ca toată energia pe care o absoarbe pe la borne să o acumuleze sub formă de energie electrică.*

Ca și bobina ideală, condensatorul ideal schimbă instantaneu puterea electromagnetică cu exteriorul. Atunci cînd se primește energie de la borne, energia electrică acumulată crește și atunci cînd se cedează energie, energia acumulată descrește.

Aplicația 1. ***Intensitatea curentului prin bobina de deflexie a tuburilor cinescop trebuie să aibă forma de undă în dinți de ferăstrău, indicată în figura 2.2, a. Să se determine forma de undă a tensiunii care trebuie aplicată la bornele bobinei dacă:***

a) bobina este admisă ideală;

b) bobina este echivalentă cu o bobină ideală în serie cu un rezistor ideal.

a) În intervalul $0 \leqslant t \leqslant T_1$ curentul este liniar crescător în timp: $i = (I_0/T_1)t$ și atunci

$$u_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = L\frac{I_0}{T_1}.$$

În al doilea interval, $T_1 \leqslant t \leqslant T$, dependența de timp este liniar descrescătoare: $i = I_0 - (I_0/T_2)(t - T_1)$, unde $T_2 = T - T_1$. Rezultă:

$$u_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{I_0}{T_2}.$$

Tensiunea la borne trebuie să aibă forma de undă dreptunghiulară indicată în figura 2.2, *b*.

b) Tensiunea aplicată la borne fiind o sumă a căderilor de tensiune inductivă și rezistivă,

$$u = u_L + u_R = L\frac{\Delta i}{\Delta t} + ri,$$

peste componenta dreptunghiulară se suprapune o componentă proporțională cu intensitatea curentului. Rezultă forma de undă reprezentată în figura 2.2, *c*.

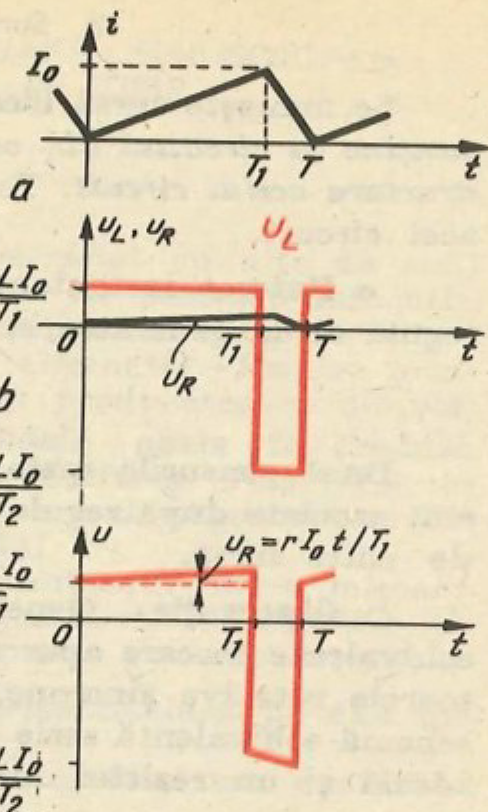


Fig. 2.2.

Aplicația 2. *Un curent liniar crescător în timp $i = kt$, cu $k = 2$ mA/s, străbate o bobină ideală cu inductivitatea $L = 50$ mH. Să se calculeze:*

a) *puterea instantanee primită pe la borne;*

b) *energia magnetică acumulată la $t_1 = 1$ s și $t_2 = 2$ s.*

a) Deoarece

$$u = L\frac{di}{dt} = Lk = 50\cdot10^{-3} \times 2\cdot10^{-3}\,\frac{\text{Wb}}{\text{s}} = 10^{-4}\,\text{V},$$

rezultă:

$$p = ui = 10^{-4} \times 2\cdot10^{-3}\,t = 2\cdot10^{-7}\,t\ \text{(W)}.$$

b) Energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = 0{,}5 \times 50\cdot10^{-3} \times (2\cdot10^{-3})^2t^2 = 10^{-7}\,t^2\ \text{(J)}.$$

Prin urmare, la $t = 1$s: $W_m = 10^{-7}$ J, iar la $t = 2$s: $W_m = 4\cdot10^{-7}$ J.

○ **Observație.** Unitățile de măsură utilizate satisfac relațiile: 1 A × 1 H = 1 Wb; 1 Wb/s = 1 V; 1 W = 1 J/s.

2. Elemente de circuit active (surse ideale)

a. *Sursa ideală de tensiune (fig. 2.3, a)*

Se numește sursă ideală de tensiune *elementul dipolar activ de circuit care menține în circuitul din care face parte o tensiune la borne dată $u = e$, independentă de structura acelui circuit.* Curentul debitat de sursă depinde însă de acel circuit.

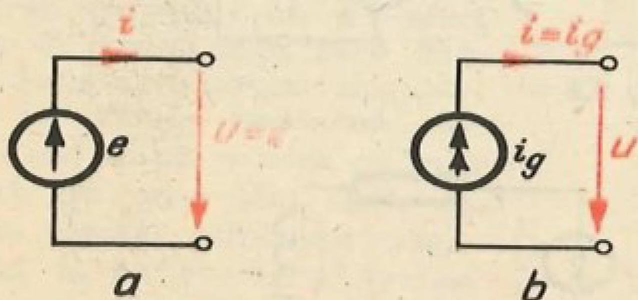


Fig. 2.3

● **Puterea instantanee** *cedată pe la borne*, în exterior, este

$$p = ui = ei.$$

Dacă i are sensul specificat (u și i asociate după regula de la generatoare), $p > 0$ și puterea este cedată în exterior. Puterea instantanee devine negativă și este *primită* în momentele în care sensul curentului este inversat, adică u și i sînt asociate după regula de la receptoare.

b. *Sursa ideală de curent (fig. 2.3, b)*

Se numeşte sursă ideală de curent *elementul dipolar activ de circuit care menţine în circuitul din care face parte un curent dat $i = i_g$, independent de structura acelui circuit.* Tensiunea la bornele sursei este determinată însă de acel circuit.

• **Puterea instantanee.** Cu sensurile reale ale lui u şi i asociate după regula de la generatoare, sursa *cedează* efectiv în exterior puterea

$$p = ui = ui_g.$$

Dacă sensurile instantanee reale ale tensiunii la borne şi curentului sînt asociate după regula de la receptoare, puterea este *primită* din exterior de către sursă.

o **Observaţie.** Generatoarele reale pot fi reprezentate prin scheme echivalente în care apar numai elemente ideale. Astfel, de exemplu, generatoarele rotative sincrone, de tensiune sinusoidală, pot fi descrise printr-o schemă echivalentă serie alcătuită dintr-o sursă ideală de tensiune, o bobină ideală şi un rezistor ideal.

Aplicaţia 1. *La bornele unei surse ideale de tensiune avînd $e = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ sînt conectate succesiv un rezistor, o bobină şi un condensator (fig. 2.4). Care este tensiunea instantanee de la bornele celor trei elemente?*

Deoarece sursa menţine tensiunea la borne dată, independent de elementul legat la borne, tensiunea este $u = e = 100\sqrt{2}\sin\omega t$. Curentul instantaneu va fi însă diferit prin cele trei elemente.

Aplicaţia 2. *O sursă ideală de curent injectează curentul în dinţi de ferăstrău (fig. 2.2,a) printr-o bobină cu inductivitatea L şi rezistenţa r (fig. 2.5, a). Să se determine tensiunea la bornele sursei de curent.*

Curentul în dinţi de ferăstrău indicat în figura 2.2, *a* determină o cădere de tensiune la bornele bobinei avînd forma de undă indicată în figura 2.2, *c*. Tensiunea la bornele generatorului de curent este egală cu această cădere de tensiune $(u_L + u_r)$.

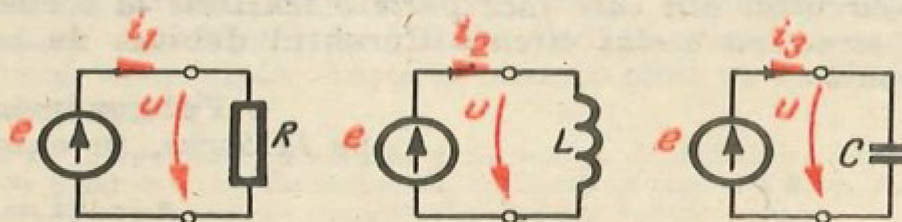


Fig. 2.4

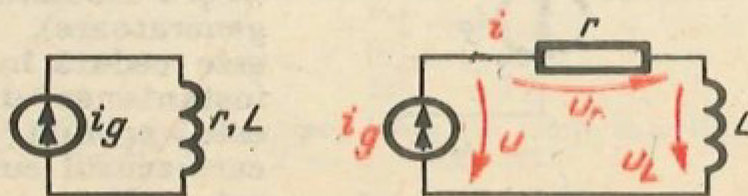


Fig. 2.5

B. PRODUCEREA TENSIUNII ELECTROMOTOARE SINUSOIDALE. MĂRIMI CU VARIAȚIE SINUSOIDALĂ ÎN TIMP

1. Principiul generatorului de curent alternativ

Circuitele de curent alternativ sinusoidal (prescurtat circuite de c.a.) au o largă răspîndire atît în electroenergetică, cît și în electrocomunicații. În electroenergetică, producerea, transmisiunea și utilizarea energiei electromagnetice se realizează aproape integral în curent alternativ. Printre principalele avantaje ale curentului alternativ amintim producerea sa simplă.

O tensiune electromotoare alternativă sinusoidală poate fi produsă prin rotirea unui cadru bobinat în cîmp magnetic uniform. Principiul de funcționare al acestui generator simplu este același cu cel al generatoarelor industriale de c.a. De aceea îl vom studia în detaliu.

Să considerăm un cadru cu N spire (fig. 2.6) antrenat într-o mișcare de rotație uniformă, cu viteza unghiulară ω, în jurul axei sale de simetrie Δ. Mișcarea de rotație se efectuează într-un cîmp magnetic uniform în spațiu și invariabil în timp, cu inducția magnetică $\vec{B}$ perpendiculară pe axa de rotație a cadrului.

Fluxul magnetic prin suprafața cadrului dreptunghiular are expresia:

$$\Phi_f = BA \cos \alpha \text{ (rel. 1.17)},$$

unde A este aria cadrului și α — unghiul dintre inducția $\vec{B}$ și versorul $\vec{n}$ normal la suprafața cadrului (fig. 2.7). Versorul $\vec{n}$ este atașat suprafeței în rotație, fiind deci un vector rotitor. Sensul versorului $\vec{n}$ este asociat după regula burghiului drept, cu un sens arbitrar ales pe conturul cadrului dreptunghiular.

Să alegem ca moment $t = 0$ momentul la care $\vec{n}$ și $\vec{B}$ au același sens, respectiv momentul cînd $\vec{n}$ „trece“ prin $\vec{B}$ (fig. 2.8,*a*). Observăm că la acest moment fluxul magnetic Φ_f este maxim și egal cu BA; el scade apoi, rămînînd pozitiv pentru ca odată cu rotirea cadrului cu un sfert de cerc să treacă prin zero (fig. 2.8, *b*), după care devine negativ. Fluxul își atinge valoarea minimă $-BA$ după rotirea cu încă un sfert de cerc (fig. 2.8, *c*). Apoi Φ_f crește, rămînînd negativ, pînă la rotirea cu al treilea sfert de cerc, cînd trece prin zero (fig. 2.8, *d*), devine pozitiv și crește pînă la atingerea valorii

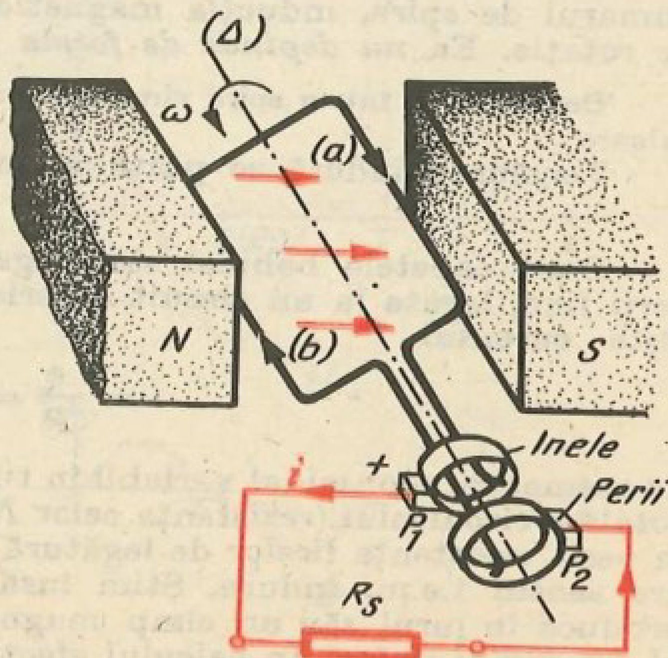


Fig. 2.6

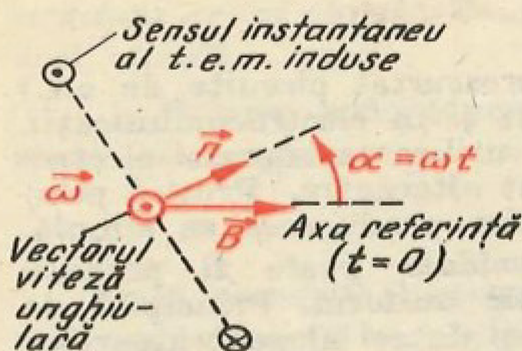


Fig. 2.7

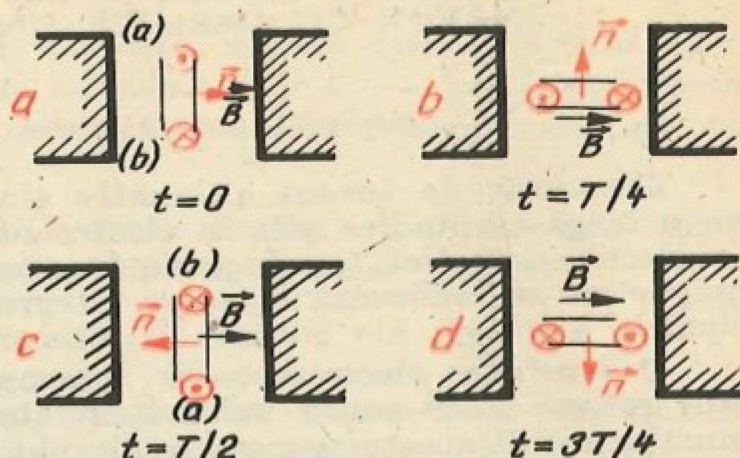


Fig. 2.8

maxime $+BA$, după o rotație completă, după care, trece din nou, prin același șir de valori.

Unghiul α format de $\vec{n}$ cu $\vec{B}$ la un moment dat t este $\alpha = \omega t$ astfel că fluxul magnetic printr-o spiră a cadrului este dat de:

$$\Phi_f = BA \cos \omega t. \tag{2.5}$$

Deoarece toate spirele cadrului sînt traversate de același flux Φ_f, fluxul magnetic total este $\Phi = N\Phi_f$. Acest flux variabil în timp (numit *flux inductor*) face ca în conturul închis format de spirele cadrului să se inducă t.e.m.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBA \cos \omega t) = NBA\, \omega \sin \omega t \text{ (v. cap. 1 C. 1. — nota).}$$

Valoarea maximă a t.e.m. induse $NBA\ \omega = E_m$ este proporțională cu numărul de spire, inducția magnetică, aria unei spire și viteza unghiulară de rotație. Ea *nu depinde de forma geometrică a spirei.*

De exemplu, într-o spiră circulară cu aceeași arie A se induce o t.e.m. de aceeași valoare.

Tensiunea indusă se poate scrie deci:

$$e = E_m \sin \omega t. \tag{2.6}$$

Dacă capetele bobinei sînt legate la două inele care alunecă pe două perii fixe, legate la un circuit exterior (fig. 2.6) atunci prin circuit se stabilește curentul

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t,$$

de asemenea sinusoidal variabil în timp. În această expresie R este rezistența totală a circuitului (rezistența celor N spire ale cadrului, rezistența de contact la perii, rezistența firelor de legătură și rezistența de sarcină). Curentul indus are sensul t.e.m. induse. Știm însă că un conductor străbătut de curent produce în jurul său un cîmp magnetic. Va exista deci și un *cîmp magnetic al curentului indus.* În calculul efectuat, acest cîmp magnetic de *reacțiune* a fost neglijat în raport cu cîmpul magnetic inductor.

Aplicație. *O bobină dreptunghiulară se rotește cu 120 rot/min într-un cîmp magnetic uniform cu inducția 0,8 T. Dacă bobina are 25 spire și suprafața unei spire este 4 cm², să se calculeze:*

a) *expresia t.e.m. induse;*

b) *timpul în care spira efectuează o rotație completă;*

c) *curentul indus într-un rezistor de 10 Ω.*

Se vor neglija: cîmpul magnetic de reacție al curentului indus, rezistența spirelor și rezistența de contact la perii.

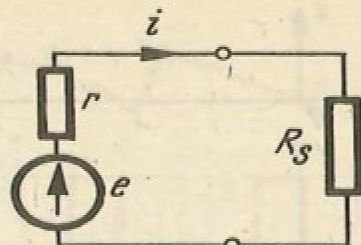


Fig. 2.9

a) Viteza unghiulară de rotație este:

$$\omega = 2\pi \times 120 \frac{\text{rot}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} = 4\pi = 12{,}56 \text{ rad/s}.$$

Valoarea maximă a t.e.m. este:

$$E_m = NBA\omega = 25 \times 0{,}8 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 12{,}56 \cong 0{,}100 \text{ V}.$$

În consecință, expresia t.e.m. este:

$$e = 0{,}1 \sin 12{,}56\, t.$$

b) Dacă se efectuează 120 rotații într-un minut, atunci pe secundă se efectuează două rotații. Timpul în care se efectuează o rotație este deci $T = \frac{1}{2} = 0{,}5$ s.

c) Deoarece generatorul considerat este echivalent unei surse avînd t.e.m. e și rezistența internă r egală cu rezistența spirelor și a contactului la perii și la care este conectat rezistorul de sarcină R_s (fig. 2.9), curentul prin circuit este:

$$i = \frac{e}{r + R_s} \cong \frac{e}{R_s} = \frac{0{,}1}{10} \sin 12{,}56\, t \text{ (A)} = 10 \sin 12{,}56\, t \text{ (mA)}$$

dacă se neglijează rezistența r.

2. Mărimi periodice

Fluxul magnetic $\Phi_f = BA \cos \omega t$ și t.e.m. $e = E_m \sin \omega t$ sînt mărimi variabile în timp. Dependența de timp a acestor mărimi este indicată în figura 2.10.

Mărimile sinusoidale, dar nu numai acestea, sînt periodice. Curentul în dinți de ferăstrău (fig. 2.11, *a*) prin bobinele de deflexie ale tuburilor cinescop, tensiunile la bornele unor generatoare electronice de semnale utilizate în testarea aparaturii electronice (fig. 2.11, *b*, *c*, *d*) sînt exemple de mărimi periodice.

O mărime periodică este *o mărime variabilă ale cărei valori se reproduc în aceeași succesiune, la intervale de timp egale.*

Perioada T este *intervalul minim de timp după care se reproduc în aceeași ordine valorile mărimii periodice.*

Valoarea instantanee a unei mărimi periodice este o funcție periodică de timp care va satisface condiția

$$i(t) = i(t + T),$$

oricare ar fi momentul t.

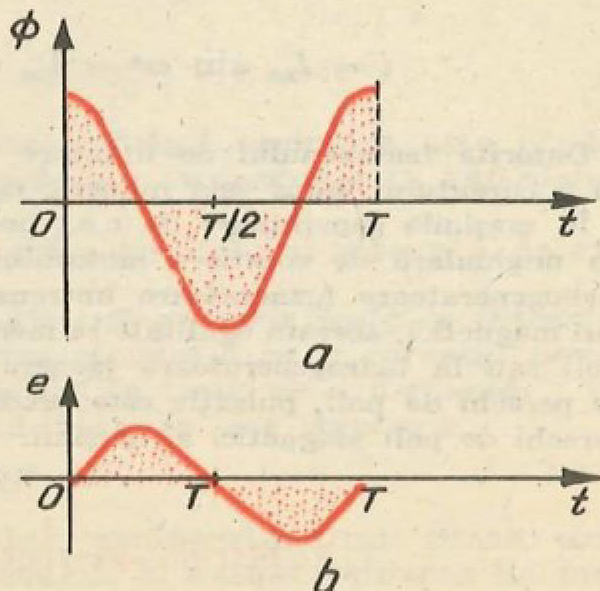


Fig. 2.10

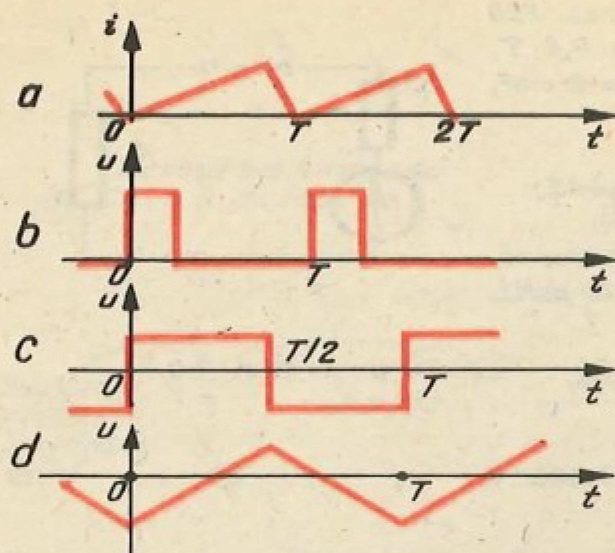


Fig. 2.11

Numărul de perioade cuprins într-o secundă **se numește frecvență.** **Frecvența se notează cu f și are unitatea de măsură *herț*, cu prescurtarea Hz. Relația de definiție este:**

$$f = \frac{1}{T}. \tag{2.7}$$

Rețelele electrice de transmisie și distribuție a energiei electrice în curent alternativ au frecvența standardizată de 50 Hz (în S.U.A., 60 Hz). Această frecvență este denumită *frecvență industrială*.

Produsul frecvenței prin 2π **se numește frecvență unghiulară sau pulsație.** **Simbolul pulsației este ω. Unitatea de măsură este radian/secundă (rad/s).**

Pulsația are relația de definiție

$$\omega = 2\pi f \tag{2.8}$$

Între aceste mărimi există și relațiile:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \ \omega = \frac{2\pi}{T}, \ \omega T = 2\pi.$$

Cu aceste relații, observăm că putem pune expresia curentului și sub una dintre formele:

$$i = I_m \sin \omega t = I_m \sin 2\pi ft = I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Datorită fenomenului de inducere a t.e.m. prin rotirea cadrului bobinat, pulsația ω a curentului indus este numeric egală cu viteza unghiulară de rotație a bobinei.

În mașinile generatoare de c.a., pulsația t.e.m. induse este în general diferită de viteza unghiulară de rotație a motorului primar de antrenare a generatorului. Numai la turbogeneratoare (generatoare antrenate de turbine cu abur) cu o singură pereche de poli magnetici, această egalitate se menține. La turbogeneratoare cu mai multe perechi de poli sau la hidrogeneratoare (generatoare antrenate de turbine hidraulice) cu mai multe perechi de poli, pulsația este produsul vitezei de rotație a turbinei prin numărul de perechi de poli magnetici ai mașinii.

3. Mărimi alternative; mărimi sinusoidale

Valoarea medie a unei mărimi periodice este ***media aritmetică a valorilor instantanee în intervalul de timp cu durata T egală cu perioada mărimii.*** **Notăm medierea în timp cu simbolul mărimii cu tildă: $\tilde{\imath}$.**

O mărime alternativă este *o mărime periodică a cărei valoare medie este nulă.*

O mărime sinusoidală este *o mărime alternativă cu variația în timp de formă sinusoidală.*

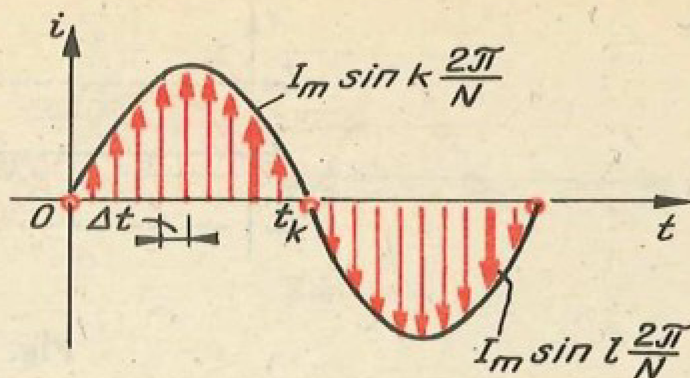


Fig. 2.12

Valoarea medie a unei mărimi sinusoidale este nulă. Referindu-ne la curentul sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$, constatăm că sensul curentului în circuitul indicat în figura 2.6 se schimbă la fiecare semiperioadă. În semiperioada $0 < t < T/2$ intensitatea curentului este pozitivă și curentul circulă de la peria P_1 la peria P_2. În semiperioada următoare ($T/2 < t < T$) intensitatea curentului este negativă și curentul își schimbă sensul, circulînd prin R_s de la P_2 la P_1. Pentru a calcula valoarea medie, să luăm valorile curentului la intervale de timp egale în cuprinsul unei perioade. În figura 2.12 perioada a fost divizată în N intervale egale și au fost indicate valorile instantanee la aceste momente. Valorile instantanee ale curentului satisfac relația de simetrie $i(t + T/2) = -i(t)$, astfel că în media aritmetică apar valori instantanee egale două cîte două dar de semne contrare. Rezultă că media aritmetică a acestor valori este nulă. Circuitul este deci străbătut de un curent alternativ.

○ **Observație.** Tensiunile dreptunghiulare și triunghiulare indicate în figurile 2.11, *c* și *d* au valorile medii nule și sînt deci de asemenea mărimi alternative. Curentul în dinți de ferăstrău (fig. 2.11, *a*) și succesiunea de impulsuri dreptunghiulare (fig. 2.11, *b*) au o valoare medie nenulă și deci nu sînt mărimi alternative.

Rețelele de curent alternativ sinusoidal sînt uzual numite *rețele de curent alternativ*, deși mărimile sinusoidale nu sînt singurele mărimi alternative.

4. Valoarea efectivă a unei mărimi periodice

Valoarea efectivă (sau **eficace**) **a unei mărimi periodice** este *rădăcina pătrată a mediei aritmetice a pătratelor valorilor instantanee în intervalul de timp al unei perioade.*

Notăm valoarea efectivă cu litera mare a simbolului mărimii (de exemplu, I).

Valoarea efectivă a unui curent periodic *este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu care, străbătînd aceeași rezistență ca și curentul periodic, face să se dezvolte aceeași cantitate de căldură în timp de o perioadă.*

Puterea instantanee disipată într-un rezistor are expresia

$$p_R = Ri^2.$$

Din cauza inerției termice a rezistorului, temperatura nu poate urmări variațiile instantanee ale pătratului curentului, ci numai valoarea lui medie. Căldura dezvoltată este atunci proporțională cu puterea medie

$$P_R = \widetilde{p}_R = R\widetilde{i^2} = RI^2,$$

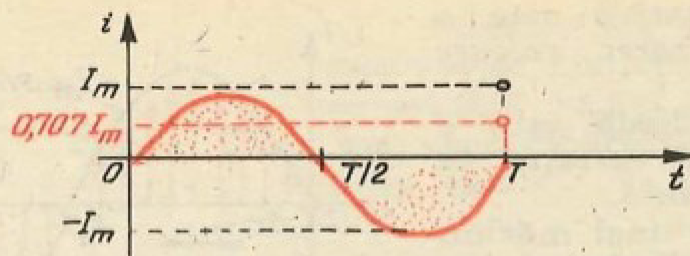


Fig. 2.13

numită *putere activă*, egală cu produsul între rezistența R și pătratul valorii efective a curentului. Aceeași putere s-ar disipa însă și atunci cînd rezistorul ar fi parcurs de un curent continuu numeric egal cu valoarea efectivă a curentului periodic. Puterile disipate fiind aceleași, rezultă că și căldura dezvoltată în cele două situații este aceeași.

o **Observație.** Din cauza inerției echipajului mobil, ampermetrele și voltmetrele cu ac indicator nu pot urmări variațiile instantanee rapide ale mărimilor periodice măsurate. De aceea, ele indică *valori medii* atunci cînd cuplul activ este proporțional cu valoarea instantanee a mărimii și *valori efective* atunci cînd cuplul activ este proporțional cu pătratul mărimii măsurate. Instrumentele magnetoelectrice indică valoarea medie și pot fi folosite numai în c.c. (eventual în c.a., cu redresor). Instrumentele electromagnetice și instrumentele electrodinamice indică valoarea efectivă și pot fi utilizate în curent alternativ.

5. Caracteristicile mărimilor sinusoidale

Să considerăm expresia generală a unei mărimi sinusoidale, de exemplu curentul sinusoidal

$$i = I_m \sin (\omega t + \gamma),$$

a cărei dependență de timp se indică în figura 2.13.

Se numește **amplitudine** *valoarea maximă I_m a mărimii sinusoidale.*

Se numește **fază** *argumentul sinusului*, adică unghiul $\omega t + \gamma$. Faza se va exprima de regulă în radiani.

Se numește **fază inițială** *valoarea γ a fazei la momentul inițial* ($t = 0$). Notăm de obicei cu γ faza inițială a unui curent, cu β faza inițială a unei tensiuni, cu α faza inițială a unei t.e.m. etc.

Convenim să exprimăm faza inițială în intervalul $[-\pi, \pi]$. Deci.

$$-\pi \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

În electrotehnică operăm cu **valori efective.** Să calculăm valoarea efectivă a curentului sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$. Pătratul valorilor instantanee se obține din relația:

$$i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t = I_m^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

În figura 2.14 se indică variația în timp a pătratului curentului. Această nouă funcție poate fi privită ca suprapunerea dintre funcția constantă de valoare I_m^2 și funcția cosinusoidală de frecvență dublă în raport cu cea a curentului. Valoarea medie a funcției constante este chiar valoarea acesteia. Valoarea medie a componentei cosinusoidale este nulă. În consecință valoarea medie a funcției i^2 este $I_m^2/2$. Rădăcina pătrată a acestei medii este valoarea efectivă

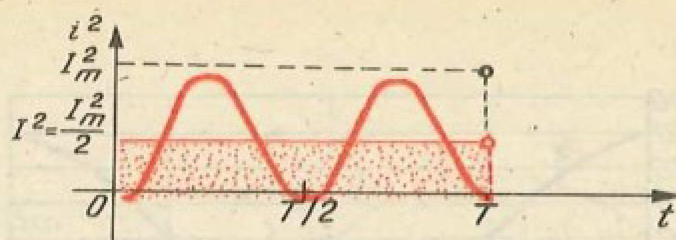


Fig. 2.14

$$I = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m. \qquad (2.9)$$

Vom scrie de aceea mărimile sinusoidale sub forma generală

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma),$$

unde $I\sqrt{2} = I_m$ este amplitudinea curentului (A). Reamintim că $T = 2\pi/\omega$ este perioada (s), $f = 1/T$ este frecvența (Hz).

Aplicația 1. *Intensitatea curentului pentru un circuit are expresia instantanee $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/6)$ (A). Să se specifice:*

a) *valoarea efectivă și faza inițială;*

b) *valorile instantanee la $\omega t = 0$ și $\omega t = \pi/6$;*

c) *momentul la care curentul are valoarea maximă, știind că frecvența este 50 Hz.*

a) Comparînd expresia dată cu expresia generală, obținem:

$$I = 2{,}5 \text{ A}, \ \gamma = -\pi/6.$$

b) $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(-\pi/6) = -2{,}5\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$ pentru $\omega t = 0$; $i = 0$ pentru $\omega t = \frac{\pi}{6}$.

c) Curentul are valoarea maximă atunci cînd faza sa are valoarea $+\pi/2$. Deci

$$\omega t_0 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_0 = 2\pi/3\omega.$$

Deoarece $\omega = 2\pi f$, rezultă $2\pi\frac{t_0}{T} = \frac{2\pi}{3}$ și $t_0 = T/3$.

Dar $T = 1/f = 1/50 = 0{,}02$ s $= 20$ ms. Momentul este la $t_0 = 20/3 = 6{,}77$ ms.

Aplicația 2. *Intensitatea curentului printr-un circuit are expresia:*

$$i = 0{,}2\sqrt{2}\sin(2\pi \cdot 50\, t) \text{ (A)}.$$

Să se calculeze:

a) *amplitudinea;*

b) *perioada;*

c) *faza inițială.*

a) Deoarece valoarea efectivă a curentului este $I = 0{,}2$ A, amplitudinea curentului este $I_m = 0{,}2\sqrt{2} = 0{,}283$ A.

b) Frecvența fiind $f = 50$ Hz, rezultă perioada $T = 1/f = 1/50 = 0{,}02$ s $= 20$ ms.

c) Faza inițială este nulă.

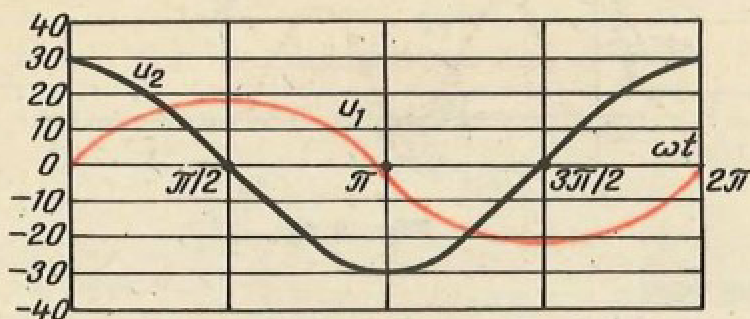


Fig. 2.15

Aplicația 3. *O tensiune sinusoidală vizualizată pe ecranul unui osciloscop are amplitudinea 30 mV și perioada 80 μs. Să se calculeze:*

a) *valoarea efectivă a semnalului;*

b) *frecvența și pulsația:*

a) $U = 0{,}707\, U_m = 0{,}707 \times 30 \cdot 10^{-3} = 21{,}21$ mV.

b) $f = 1/T = 1/(80 \cdot 10^{-6}) = 1{,}25 \cdot 10^4$ Hz $= 12{,}5$ kHz;

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1{,}25 \cdot 10^4 = 7{,}85 \cdot 10^4$ rad/s.

Aplicația 4. *În figura 2.15 sînt reprezentate două tensiuni sinusoidale.*

a) *Să se specifice expresiile instantanee.*

b) *Să se calculeze valorile efective și diferența fazelor inițiale ale celor două mărimi.*

a) Tensiunile u_1 și u_2 au expresiile: $u_1 = 20 \sin \omega t$; $u_2 = 30 \cos \omega t$. A doua tensiune se mai scrie: $u_2 = 30 \sin (\omega t + \pi/2)$, pentru a se respecta scrierea sub forma normală în sinus.

b) Valorile efective sînt: $U_1 = 0{,}707 \times 20 = 14{,}14$ V; $U_2 = 0{,}707 \times 30 = 21{,}21$ V. Fazele inițiale sînt: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ rad. Diferența fazelor inițiale este $\gamma_1 - \gamma_2 = -\pi/2$ rad.

6. Reprezentarea vectorială a mărimilor sinusoidale

În regim sinusoidal toți curenții și toate tensiunile dintr-un circuit electric sînt mărimi variabile sinusoidal în timp. Frecvența tuturor acestor mărimi sinusoidale este aceeași și este determinată de sursele din circuit. Dintre **cele trei mărimi care determină complet o mărime sinusoidală:** *frecvența, valoarea efectivă* și *faza inițială*, una — frecvența — este cunoscută. Este necesară deci numai determinarea celorlalte două. Aceasta înseamnă că, de exemplu, curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$ este complet precizat dacă se dau valoarea efectivă I și faza inițială γ.

Există mărimi matematice complet caracterizate prin perechi de numere reale: vectorii liberi din plan, numerele complexe etc. Între mărimile sinusoidale și aceste mărimi matematice se poate stabili o corespondență biunivocă. Se obține astfel o reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale. Se spune că avem *o reprezentare vectorială*, respectiv *o reprezentare în planul complex*. Studiul circuitelor electrice în regim sinusoidal cu ajutorul acestor reprezentări este considerabil simplificat.

• Vom studia pentru început **reprezentarea vectorială.**

Reamintim că un vector liber în plan se caracterizează prin două mărimi scalare: modulul și unghiul format cu o axă de referință. Punctul de aplicație al unui vector liber este arbitrar.

În reprezentarea vectorială, unei mărimi sinusoidale $i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \gamma)$ *i se asociază un vector liber în plan* $\vec{I}$: $I\underline{/\gamma}$, *care are modulul egal cu valoarea efectivă și care face cu o axă de referință un unghi egal cu faza inițială.*

○ **Observație.** Reprezentarea este biunivocă: unui vector liber din plan îi corespunde o mărime sinusoidală.

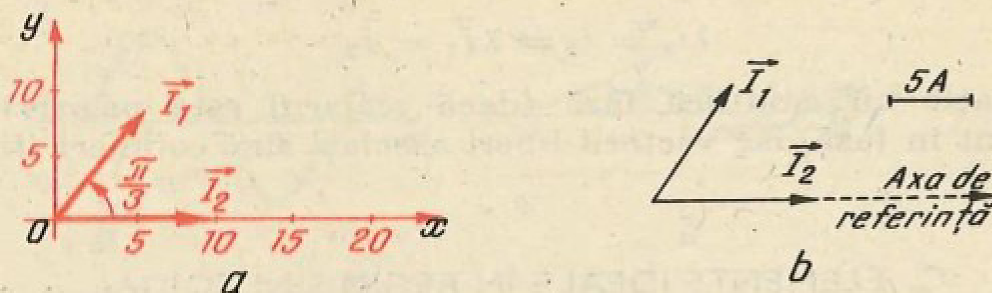


Fig. 2.16

Scriem această corespondență biunivocă sub forma:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I}\ :\ I\underline{/\gamma}. \qquad (2.10)$$

De exemplu, să considerăm curentul $i_1 = 10\ \sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \pi/3)\ A$. În planul *xoy* să alegem axa *ox* ca axă de referință și originea ca punct de aplicație (fig. 2.16, *a*). Vectorul liber asociat este $\vec{I_1} : 10\underline{/\pi/3}$ (el are modulul 10 *A* și face unghiul $\pi/3$ cu axa *ox*).

De obicei se utilizează același punct de aplicație pentru toți vectorii liberi asociați curenților și tensiunilor dintr-un circuit dat. De aceea, de exemplu, vectorul $\vec{I_2} : 10\underline{/0}$, asociat curentului $i_2 = 10\ \sqrt{2}\ \sin\ \omega t$, este reprezentat cu punctul de aplicație în originea axelor. În aplicații este suficient să se specifice axa de referință aleasă și unitatea de măsură a reprezentărilor (fig. 2.16, *b*).

• Să exemplificăm **proprietățile reprezentării vectoriale** prin corespondența a două operații cu mărimi sinusoidale: adunarea și înmulțirea cu un scalar.

Adunarea mărimilor sinusoidale corespunde în mod biunivoc cu adunarea vectorilor liberi asociați:

$$i_1 + i_2 = i \rightleftarrows \vec{I_1} + \vec{I_2} = \vec{I}.$$

Vectorul $\vec{I}$ rezultă din compunerea vectorilor $\vec{I_1}$ și $\vec{I_2}$ după regula paralelogramului (sau triunghiului) (fig. 2.17, *a*).

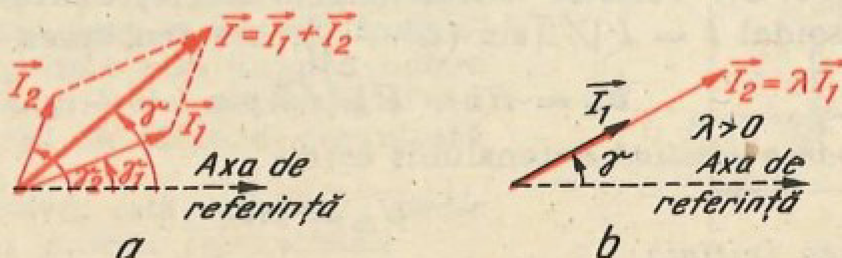


Fig. 2.17

Înmulțirea cu un factor constant $\lambda > 0$ a unei mărimi sinusoidale corespunde biunivoc cu înmulțirea vectorului liber asociat cu acel scalar:

$$\lambda i_1 = i_2 \rightleftarrows \lambda \vec{I}_1 = \vec{I}_2.$$

Această operație nu modifică faza (dacă scalarul este pozitiv): mărimile sinusoidale sînt în fază, iar vectorii liberi asociați sînt coliniari (fig. 2.17, *b*).

C. ELEMENTE IDEALE ÎN REGIM SINUSOIDAL

Elementele de circuit ideale: rezistorul, bobina și condensatorul au fost studiate în regim variabil în timp. Am constatat că fiecare dintre aceste trei elemente se caracterizează printr-o ecuație tensiune-curent specifică:

$$u_R = Ri;\ u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t};\ i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

În regim permanent sinusoidal, dacă se aplică la bornele elementului tensiunea sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \beta),$$

intensitatea curentului prin element este de asemenea sinusoidală și de aceeași pulsație:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \gamma).$$

Celor trei ecuații de circuit de regim variabil le corespund în regim sinusoidal ecuații între valori efective și între fazele inițiale. Vom determina aceste relații pe rînd, pentru fiecare element. De asemenea, vom analiza schimbul de energie la bornele elementelor în regim sinusoidal.

1. Rezistorul ideal. Puterea activă

• Un rezistor ideal (fig. 2.18), străbătut de curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$, are **tensiunea la borne**:

$$u_R = Ri = RI\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \gamma).$$

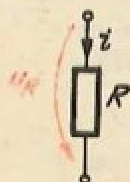


Fig. 2.18

Valoarea efectivă a tensiunii este

$$\boxed{U_R = RI} \qquad (2.11)$$

și *faza inițială*

$$\boxed{\beta = \gamma}.$$

Curentul este deci în fază cu tensiunea aplicată (fig. 2.19, *a*). *Valorile efective satisfac „legea" lui Ohm* (2.11).

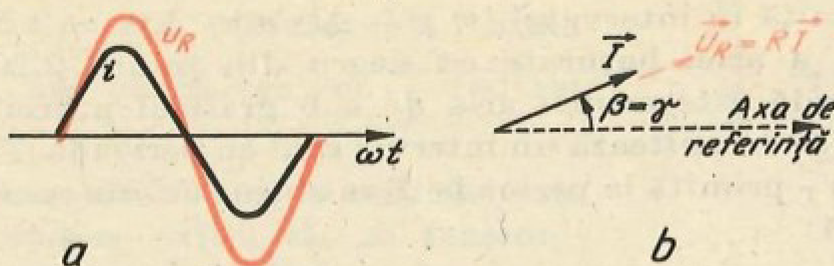


Fig. 2.19

• **Vectorii liberi asociați sînt:**

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I} : I\underline{/\gamma};$$

$$u_R = RI\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{U}_R : RI\underline{/\gamma}.$$

Ei satisfac ecuația

$$\vec{U}_R = R\vec{I}$$

și se reprezintă prin *vectori coliniari* (fig. 2.19, *b*).

• **Puterea instantanee** primită pe la borne de rezistorul ideal are expresia

$$p = u_R i = Ri^2$$

și este întotdeauna pozitivă (fig. 2.20). Să calculăm valoarea medie a puterii instantanee în intervalul unei perioade. Obținem:

$$\boxed{P = \tilde{p} = R\tilde{i^2} = RI^2},$$

deoarece $\tilde{i^2} = I^2$ conform calculului efectuat la determinarea valorii efective a unui curent sinusoidal. Știm că din cauza inerției termice, căldura dezvoltată în rezistoare este proporțională cu această valoare medie în timp a puterii instantanee. Această putere este numită *putere activă*. Definiția ei este generală și nu este legată numai de căldura dezvoltată în rezistoare.

Puterea activă *este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee.*

Puterea activă se notează cu *P* și se măsoară în *watt*. Multiplii des utilizați sînt kilowatt (1 kW = 10^3 W), megawatt (1 MW = 10^6 W).

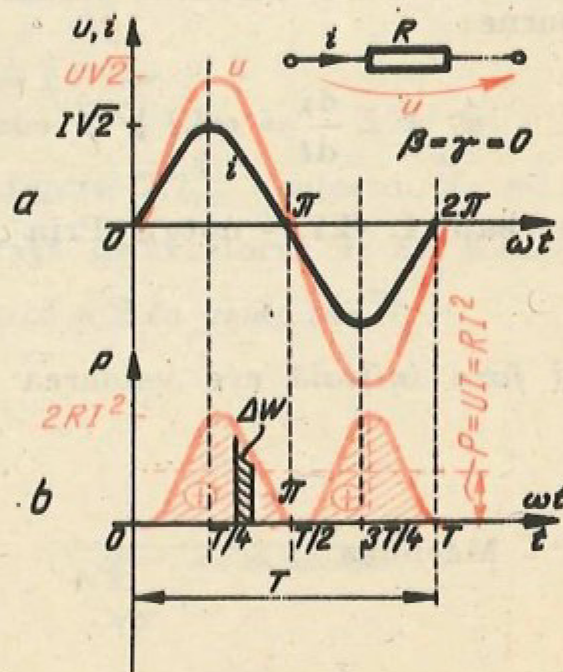


Fig. 2.20

Să calculăm **energia electrică primită în intervalul unei perioade.** Deoarece puterea instantanee este debitul instantaneu al energiei electrice primite, energia primită în intervalul $(t; t + \Delta t)$ este $\Delta W = p\Delta t$ și are semnificația geometrică a ariei hașurate cu negru din figura 2.20, *b*. Energia primită într-o perioadă este atunci aria de sub graficul puterii instantanee între două momente ce delimitează un interval egal cu perioada T (fig. 2.20, *b*). Împărțind energia W_T primită la perioada T se obține *debitul mediu al energiei*, deci puterea activă:

$$P = \frac{W_T}{T}.$$

○ **Observație.** În aplicații interesează energia absorbită într-un interval de timp foarte mare față de perioada T. Dacă intervalul este egal cu un număr întreg de perioade, atunci debitul mediu este de asemenea puterea activă deoarece într-un număr n întreg de perioade energia primită este nW_T. Dacă intervalul este arbitrar, dar foarte mare în raport cu T, energia electrică primită este, cu bună aproximație, egală cu puterea activă înmulțită cu acel interval, cu abateri cu atît mai mici cu cît intervalul este mai mare.

2. Bobina ideală. Reactanța inductivă. Puterea reactivă inductivă

● Să considerăm o bobină ideală. În regim sinusoidal bobina ideală străbătută de curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \gamma)$ are **tensiunea la borne**:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega LI\sqrt{2}\,\cos\,(\omega t + \gamma) = \omega LI\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$

(v. cap. 1. C.1 — nota). Prin urmare, *valoarea efectivă* a tensiunii u_L este

$$U_L = \omega LI$$

și *faza inițială* are valoarea

$$\beta = \gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Mărimea

$$\omega L = X_L \tag{2.12}$$

se numește *reactanță inductivă*. Simbolul reactanței este X. Reactanța se măsoară în *ohmi*, ca și rezistența.

○ **Concluzii.** Pentru o bobină ideală rezultă că:

• curentul este defazat în urma tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (fig. 2.21);

• valoarea efectivă a curentului este egală cu valoarea efectivă a tensiunii împărțită la reactanța bobinei.

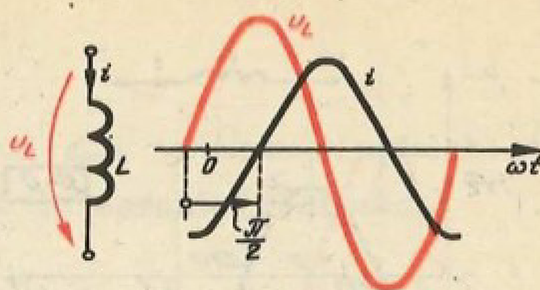


Fig. 2.21

○ **Observații.** 1) *În curent continuu* căderea de tensiune la bornele unei bobine ideale este nulă, deoarece derivata unei mărimi invariabile în timp este nulă (viteza ei de variație este nulă). Se spune că ***bobina reprezintă un scurtcircuit.***

2) *În curent alternativ* la o tensiune la borne dată, curentul este limitat de reactanța bobinei, care este proporțională cu frecvența. De aceea ***o bobină blochează trecerea curentului la frecvențe înalte și reprezintă un scurtcircuit la frecvențe suficient de joase.***

3) ***Reactanța bobinei nu are sens decît în curent alternativ*** (în regimul în care ea este definită).

• **Vectorii asociați tensiunii și curentului**

$$u_L = U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \rightleftarrows \vec{U}_L : U\ \underline{/\pi/2+\gamma};$$

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \vec{I} : I\underline{/\gamma},$$

sînt reprezentați în diagrama vectorială din figura 2.22. Vectorul $\vec{U}_L$ este rotit cu unghiul $\pi/2$ în sens trigonometric față de vectorul $\vec{I}$. ***La bobina ideală $\vec{U}_L \perp \vec{I}$ și curentul $\vec{I}$ este defazat cu unghiul $\pi/2$ în urma lui $\vec{U}_L$.***

• **Puterea instantanee** schimbată de bobina ideală pe la borne are expresia:

$$p = u_L i = 2\omega LI^2 2\sin(\omega t + \gamma)\cos(\omega t + \gamma) = \omega LI^2 \sin 2(\omega t + \gamma)$$

și este sinusoidal variabilă în timp, de frecvență dublă (fig. 2.23, *a*).

Puterea activă. Pe durata unei perioade, într-o semiperioadă puterea instantanee este primită de bobină, iar în semiperioada imediat următoare

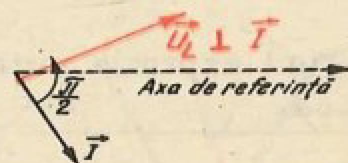


Fig. 2.22

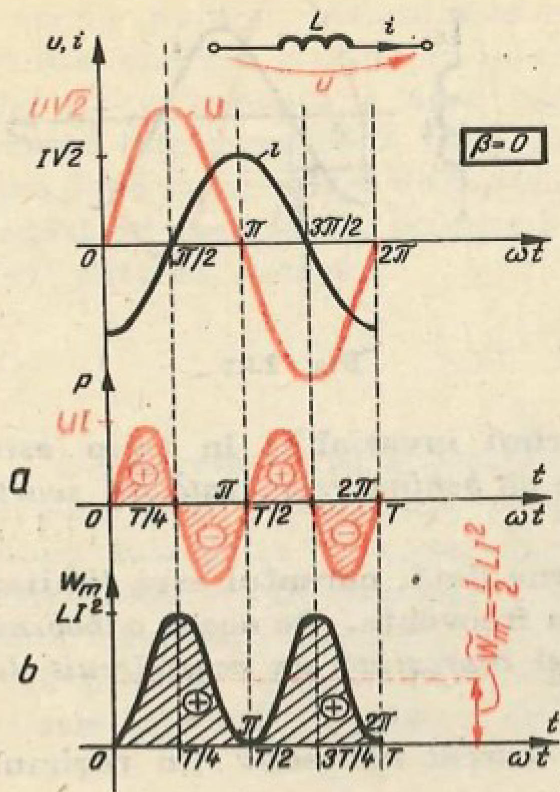


Fig. 2.23

puterea instantanee este cedată de bobină spre exterior (de exemplu, sursei la care este conectată). În medie, pe o perioadă energia primită pe la borne este nulă. *Puterea activă este* deci de asemenea *nulă*. În bobina ideală nu au loc transformări ireversibile ale energiei în căldură.

Bobina ideală nu este un consumator de putere activă; ea schimbă puterea instantanee cu exteriorul. Putem caracteriza acest schimb energetic prin amplitudinea puterii instantanee (care este oscilantă). Numim această mărime **putere reactivă inductivă.** Expresia ei este:

$$\boxed{Q_L = \omega L I^2 = X_L I^2} \quad (2.13)$$

Puterea reactivă are simbolul Q. Ea se măsoară în *var* (prescurtare de la volt-amper-reactiv).

• **Variația în timp a energiei magnetice** $W_m(t) = \frac{1}{2} Li^2$ este reprezentată în figura 2.23, *b*. Atunci *cînd puterea instantanee este pozitivă*, de exemplu în intervalul $(0;\ T/4)$, energia magnetică acumulată în bobină crește de la zero la valoarea maximă LI^2, avînd semnificația geometrică a ariei hașurate de sub graficul puterii instantanee. Atunci *cînd puterea instantanee este negativă*, în intervalul $(T/4;\ T/2)$, energia magnetică acumulată descrește de la valoarea maximă la zero. În acest interval bobina ideală cedează integral energia primită. Bobina ideală schimbă energia pe la borne fără a o consuma; ceea ce primește într-un interval cu durata $T/4$ se cedează în intervalul imediat următor. Valoarea medie în timp, pe o perioadă, a energiei magnetice este însă:

$$\widetilde{W}_m = \frac{1}{2} L\widetilde{i^2} = \frac{1}{2} LI^2.$$

Comparînd expresia puterii reactive cu cea a energiei magnetice medii, constatăm că

$$\boxed{Q_L = 2\ \omega \widetilde{W}_m},$$

ceea ce arată că *puterea reactivă inductivă este proporțională cu valoarea medie pe o perioadă, a energiei magnetice acumulate în bobină.*

• În regim sinusoidal condensatorul ideal sub tensiunea aplicată la borne $u_C = U_C\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$ este străbătut de **curentul sinusoidal**

$$i = C\frac{du_C}{dt}C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) = C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

(v. cap. 1. C.1 — nota).

Prin urmare, *valoarea efectivă* a curentului este

$$I = \omega C U \tag{2.14}$$

și *faza inițială* are valoarea

$$\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Mărimea

$$\frac{-1}{\omega C} = X_C \tag{2.15}$$

este *reactanța capacitivă*.

○ **Concluzii.** Pentru un condensator ideal rezultă deci că:

• curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$ radiani (fig. 2.24);

• valoarea efectivă a curentului este egală cu valoarea efectivă a tensiunii împărțită la modulul reactanței capacitive.

○ **Observații.** 1) *În curent continuu* curentul prin condensatorul ideal este nul. *Condensatorul reprezintă deci o întrerupere de circuit.*

2) *În curent alternativ*, la o tensiune aplicată la borne dată, curentul prin condensator este determinat de reactanța sa. Reactanța unui condensator ideal este invers proporțională cu frecvența. De aceea *condensatorul ideal blochează trecerea curentului la frecvențe joase și reprezintă un scurtcircuit la frecvențe înalte.*

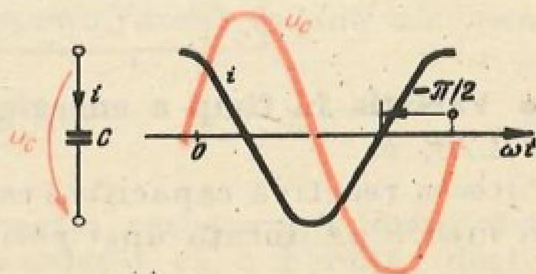


Fig. 2.24

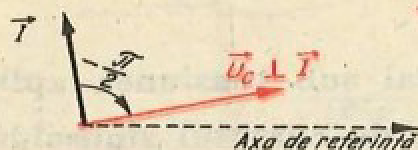


Fig. 2.25

Fig. 2.26

• **Vectorii asociați tensiunii și curentului,**

$$u_C = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) \rightleftharpoons \vec{U}_C : U\underline{/\beta};$$

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta + \pi/2) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \vec{I} : I\underline{/\beta + \pi/2}$$

sînt reprezentați în diagrama vectorială din figura 2.25. Vectorul curent $\vec{I}$ este rotit cu unghiul $\pi/2$ în sens trigonometric față de vectorul tensiune $\vec{U}_C$ aplicată la borne. *La un condensator ideal* $\vec{U}_C \perp \vec{I}$ *și curentul* $\vec{I}$ *este defazat cu unghiul* $\pi/2$ *radiani înaintea lui* $\vec{U}_C$.

• **Puterea instantanee** schimbată de condensatorul ideal pe la borne are expresia

$$p = u_C i = \omega C U^2 2\sin(\omega t + \beta)\cos(\omega t + \beta) = \omega C U^2 \sin 2(\omega t + \beta)$$

și oscilează cu frecvența unghiulară 2ω în jurul valorii nule (fig. 2.26, *a*), ca și la o bobină ideală.

○ **În concluzie,** pentru un condensator ideal:

• puterea activă este nulă;

• puterea reactivă capacitivă, definită, pînă la semn, ca amplitudine a puterii instantanee oscilante, este

$$Q_C = U^2/X_C = X_C I^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2. \qquad (2.16)$$

• **Variația în timp a energiei electrice instantanee** este reprezentată în figura 2.26, *b*.

Puterea reactivă capacitivă este proporțională cu energia electrică acumulată în medie pe durata unei perioade în cîmpul electric al condensatorului:

$$Q_C = -2\omega\widetilde{W}_e,$$

unde

$$\widetilde{W}_e = \frac{1}{2} C\widetilde{u}_C^2 = \frac{1}{2} CU^2.$$

D. COMPORTAREA UNOR CIRCUITE SIMPLE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

1. Impedanţa, admitanţa şi defazajul

Să considerăm un circuit neramificat, cu două borne de acces, alcătuit din elemente de circuit ideale pasive. Un astfel de circuit dipolar poate fi de exemplu un rezistor ideal, o bobină ideală, un condensator ideal, o conexiune serie a acestora etc.

În regim permanent sinusoidal, dacă se aplică la borne tensiunea sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta),$$

intensitatea curentului prin circuit este de asemenea sinusoidală şi de aceeaşi frecvenţă

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma).$$

• Se numeşte **impedanţă a circuitului** *raportul dintre valoarea efectivă a tensiunii şi valoarea efectivă a curentului:*

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} > 0. \tag{2.17}$$

Impedanţa se măsoară în *ohmi* (Ω), ca şi rezistenţa.

• Se numeşte **admitanţă a circuitului** *raportul dintre valoarea efectivă a curentului şi valoarea efectivă a tensiunii:*

$$\boxed{Y = \frac{I}{U}} > 0. \tag{2.18}$$

Admitanţa se măsoară în *siemenşi* (S), ca şi conductanţa.

Impedanţa şi admitanţa sînt mărimi pozitive.

• Se numeşte **defazaj** al curentului *diferenţa fazelor iniţiale ale tensiunii şi curentului:*

$$\boxed{\varphi = \beta - \gamma} \gtrless 0. \tag{2.19}$$

Faza iniţială a curentului este, cu excepţia rezistorului ideal, diferită de cea a tensiunii aplicate la borne. Am constatat că o bobină ideală sau un condensator ideal defazează curentul în urmă, respectiv înaintea tensiunii, cu unghiul $\pi/2$ rad. În circuite simple, pasive, alcătuite din rezis-

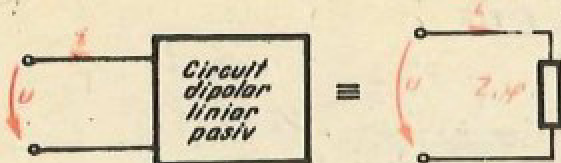


Fig. 2.27

toare, bobine și condensatoare, curentul va fi defazat în urma sau înaintea tensiunii, după natura circuitului, unghiul de defazaj fiind cuprins între $-\pi/2$ și $+\pi/2$ rad.

Defazajul se măsoară în *radiani*, ca și fazele inițiale.

Defazajul poate fi pozitiv, negativ sau nul. Defazajul este pozitiv cînd curentul se află în urma tensiunii. Dacă defazajul este nul, mărimile sinusoidale sînt *în fază*. Dacă defazajul este $\pm\pi/2$, mărimile sînt *în cuadratură*.

o **Observații.**

1) Admitanța este inversul impedanței și reciproc:

$$Y = \frac{1}{Z}; \quad Z = \frac{1}{Y}.$$

2) *Impedanța și defazajul caracterizează complet un circuit neramificat.* Dacă, de exemplu, se dă tensiunea sinusoidală la borne, impedanța și defazajul, intensitatea curentului prin circuit este univoc determinată:

$$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta - \varphi).$$

3) Circuitele simple pot fi reprezentate cu simbolul utilizat pentru un rezistor ideal, pe care se specifică perechea de mărimi (Z, φ) (fig. 2.27). Uneori acest element echivalent circuitului se numește *impedor*. Impedanța și defazajul caracterizează complet un impedor.

Aplicația 1. *Tensiunea la borne și intensitatea curentului printr-un circuit dipolar au expresiile:*

$$u = 120\sqrt{2}\sin\omega t \text{ (V)};$$

$$i = 2{,}4\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/6) \text{ (A)}.$$

Să se calculeze impedanța, admitanța și defazajul.

Deoarece $U = 120$ V, $I = 2{,}4$ A, impedanța și admitanța au valorile:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{2{,}4} = 50\ \Omega; \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{50} = 0{,}02\text{ S}.$$

Deoarece faza inițială a tensiunii este nulă și faza inițială a curentului este $\gamma = -\pi/6$, defazajul are valoarea

$$\varphi = \beta - \gamma = 0 - (-\pi/6) = +\pi/6.$$

Defazajul fiind pozitiv, curentul este în urma tensiunii.

Aplicația 2. *Curentul printr-un circuit este $i = 0{,}2\sqrt{2}\sin\omega t$ (A). Impedanța și defazajul circuitului au valorile $Z = 100\ \Omega$; $\varphi = -\pi/2$. Să se determine tensiunea aplicată la borne.*

Valoarea efectivă a tensiunii este $U = ZI = 100 \times 0,2 = 20$ V. Faza inițială a tensiunii este $\beta = \gamma + \varphi = \varphi = -\frac{\pi}{2}$. Deci:

$$u = 20\sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/2).$$

Curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\pi/2$ radiani.

Aplicația 3. *Să se calculeze impedanța, admitanța și defazajul rezistorului, bobinei și condensatorului, considerate elemente ideale.*

Pornind de la definiție, obținem expresiile specificate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Elementul de circuit	Impedanța $\underline{Z}$	Admitanța Y	Defazajul φ
R	R	$\frac{1}{R} = G$	0
L	ωL	$\frac{1}{\omega L}$	$+\frac{\pi}{2}$
C	$\frac{1}{\omega C}$	ωC	$-\frac{\pi}{2}$

○ **Observații.** 1) Prin definiție, defazajul este pozitiv atunci cînd curentul este în urma tensiunii. Prin urmare, pentru bobina ideală, defazajul de $\frac{\pi}{2}$ considerat de la curent spre tensiune trebuie să apară în sensul pozitiv al axei absciselor (fig. 2.21). Pentru condensatorul ideal defazajul trebuie să fie reprezentat în sensul negativ al axei (fig. 2.24).

2) Tensiunea și curentul prin bobina ideală și prin condensatorul ideal sînt în cuadratură.

3) La o tensiune aplicată dată, impedanța unui element limitează curentul. Impedanța bobinei crește cu frecvența. Impedanța unui condensator ideal este invers proporțională cu frecvența.

Aplicația 4. *O bobină are inductivitatea $L = 2,3$ mH. Să se calculeze impedanța bobinei la:*

a) $f_1 = 50$ *Hz;*

b) $f_2 = 160$ *kHz.*

Bobina se va considera ideală.

a) $Z_L = \omega L = 2\pi f_1 L = 2\pi \times 50 \times 2,3 \cdot 10^{-3} = 0,7226\ \Omega$.

b) $Z_L = 2\pi f_2 L = 2\pi \times 160 \cdot 10^3 \times 2,3 \cdot 10^{-3} = 2\,312\ \Omega = 2,312\ \text{k}\Omega$.

Aplicația 5. *Un condensator are capacitatea de 5,6 nF. Să se calculeze impedanța condensatorului la:*

a) $f_1 = 50$ *Hz;*

b) $f_2 = 160$ *kHz.*

a) $Z_C = \frac{1}{\omega C} = 1/(2\pi f_1 C) = (2\pi \times 50 \times 5,6 \cdot 10^{-9})^{-1} = 5,684 \cdot 10^5\ \Omega$.

b) $Z_C = 1/(2\pi f_2 C) = (2\pi \times 160 \cdot 10^3 \times 5,6 \cdot 10^{-9})^{-1} = 177,62\ \Omega$.

Un circuit dipolar sub tensiunea la borne $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ absoarbe de la sursa de alimentare curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$, defazat faţă de tensiune (fig. 2.28, *a* şi *b*).

• **Puterea instantanee** la borne este

$$p = ui = 2\,UI\sin\omega t\sin(\omega t - \varphi) =$$
$$= UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi),$$

deoarece $2\sin A\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$, conform unei identităţi trigonometrice cunoscute.

• **Puterea activă** *este media pe o perioadă a puterii instantanee.* Din figura 2.28, *c* se observă că puterea instantanee p are o componentă constantă, $UI\cos\varphi$, peste care se suprapune o componentă alternativă de frecvenţă dublă, de amplitudine UI. Deoarece componenta de frecvenţă dublă are valoarea medie nulă, rezultă pentru puterea activă relaţia

$$\boxed{\tilde{p} = P = UI\cos\varphi} \geqslant 0. \qquad (2.20)$$

Puterea activă a unui circuit dipolar *se calculează ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului multiplicat prin cosinusul unghiului de defazaj dintre curent şi tensiune.*

Puterea activă corespunde unui *aport mediu de energie electromagnetică.* Într-adevăr, urmărind graficul puterii instantanee (fig. 2.28, *c*) observăm că într-o perioadă, în două intervale, circuitul primeşte energie pe la borne (ariile haşurate, marcate cu ⊕) şi în celelalte două circuitul cedează energie pe la borne (ariile haşurate, marcate cu ⊖). Într-o perioadă energia cedată fiind mai mică decît cea primită, circuitul primeşte efectiv energie pe la borne.

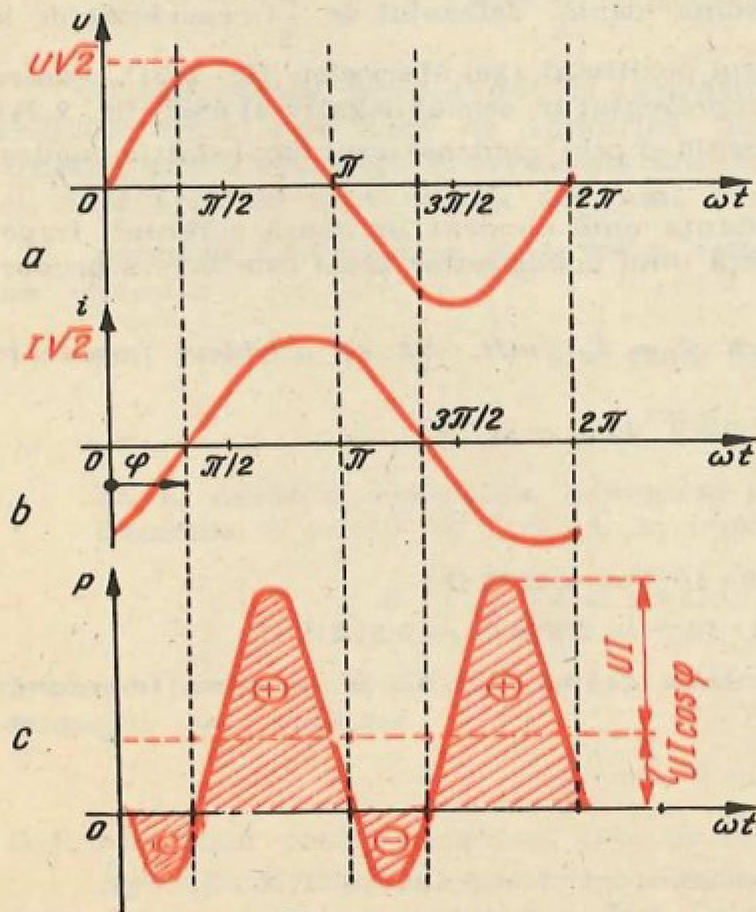


Fig. 2.28

○ **Notă.** Pentru un *rezistor ideal* $\varphi = 0$ şi $U = RI$, astfel că $P_R = UI = RI^2$. Pentru o *bobină ideală* defazajul este $+\pi/2$, pentru un *condensator ideal* $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. În amîndouă cazurile $\cos\varphi = 0$ şi puterea activă este nulă. Regăsim astfel valorile puterii active pentru cele trei elemente ideale, obţinute la studiul acestor elemente în regim sinusoidal.

• Prin analogie cu expresia puterii active, se defineşte **puterea reactivă,** prin relaţia:

$$Q = UI \sin \varphi \gtrless 0. \tag{2.21}$$

Puterea reactivă a unui circuit dipolar *este produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului multiplicat prin sinusul unghiului de defazaj dintre curent şi tensiune.*

○ **Notă.** Se verifică imediat că pentru un *rezistor ideal* $Q_R = 0$, deoarece $\sin \varphi = 0$, în timp ce pentru o *bobină ideală*, pentru care $\varphi = +\pi/2$ şi $\sin \varphi = 1$, rezultă

$$Q_L = UI = X_L I^2 > 0,$$

iar pentru un *condensator ideal*, pentru care $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ şi $\sin \varphi = -1$, rezultă

$$Q_C = -UI = X_C I^2 < 0.$$

Regăsim astfel valorile puterii reactive obţinute la studiul elementelor ideale de circuit în regim sinusoidal.

Să observăm că datorită convenţiei de definiţie a defazajului pozitiv (curentul în urma tensiunii), puterea reactivă este pozitivă la bobine şi negativă la condensatoare.

• În regim sinusoidal se poate calcula o putere „ca în curent continuu". Aceasta este **puterea aparentă.**

Se numeşte **putere aparentă a unui circuit dipolar** *produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului.* Se notează cu simbolul S.

$$S = UI > 0. \tag{2.22}$$

Puterea aparentă se măsoară în *volt-amperi* (VA).

○ **Observaţie.** La aceleaşi valori efective ale tensiunii şi curentului şi la defazaj variabil, puterea aparentă corespunde valorii maxime a puterii active: $P = S$ (dacă $\varphi = 0$).

• Se numeşte **factor de putere** *raportul dintre puterea activă şi cea aparentă*

$$k_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi > 0 \tag{2.23}$$

Pentru ca o instalaţie să funcţioneze cu maximum de putere activă, adică cu eficacitate maximă, factorul de putere trebuie să fie *cît mai aproape de unitate.*

• **Triunghiul puterilor.** Puterile activă, reactivă şi aparentă satisfac relaţiile:

$$P = S \cos \varphi; \; Q = S \sin \varphi;$$
$$S^2 = P^2 + Q^2; \; P \operatorname{tg} \varphi = Q.$$

Aceste relaţii ne arată că se poate construi un triunghi al puterilor ca în figura 2.29.

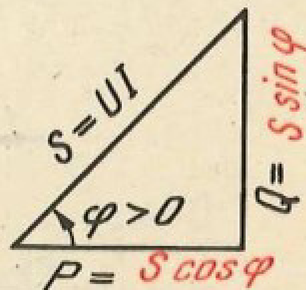


Fig. 2.29

Aplicația 1. *Un consumator inductiv, alimentat sub o tensiune sinusoidală avînd valoarea efectivă 220 V, absoarbe un curent avînd valoare efectivă 11,2 A. Dacă curentul este defazat în urma tensiunii cu un unghi de 12°, să se calculeze:*

a) *puterile activă, reactivă și aparentă;*

b) *factorul de putere.*

a) $P = UI \cos \varphi = 220 \times 11{,}2 \times \cos 12° = 2\,410{,}16$ W;

$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 11{,}2 \times \sin 12° = 512{,}29$ var;

$S = UI = 220 \times 11{,}2 = 2\,464$ VA.

b) $k_p = \cos \varphi = \cos 12° = 0{,}978$.

Aplicația 2. *O instalație de putere activă 2 kW alimentată la tensiunea sinusoidală, avînd valoarea efectivă 380 V, funcționează cu factorul de putere $k_p = 0{,}8$. În urma unor măsuri de ameliorare a factorului de putere, instalația funcționează la factorul de putere $k_p = 0{,}96$. Să se calculeze valorile efective ale curenților absorbiți înainte și după ameliorarea factorului de putere.*

$$I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1} = \frac{2\,000}{380 \times 0{,}8} = 6{,}58 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_2} = \frac{2\,000}{380 \times 0{,}96} = 5{,}48 \text{ A}.$$

Instalația cu factorul de putere ameliorat consumă aceeași putere activă la un curent cu 16,72% mai mic.

3. Circuitul R, L serie

Să considerăm circuitul format dintr-un rezistor de rezistență R legat în serie cu o bobină de inductivitate L (fig. 2.30, *a*), sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$.

• Așa cum am arătat în subcapitolul D.1, pentru a caracteriza complet circuitul este necesar **să găsim expresia impedanței și defazajului.** Vom utiliza în acest scop diagrama vectorială.

Tensiunea la borne este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente și de aceea:

$$u = u_R + u_L.$$

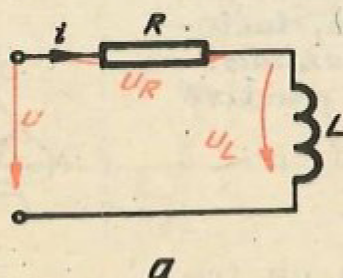
Ecuația vectorială asociată acestei relații este

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L.$$

Rezultatele obținute la studiul elementelor ideale în regim sinusoidal ne arată că:

$$U_R = RI \text{ și } \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$

$$U_L = \omega LI \text{ și } \vec{U}_L \perp \vec{I} \text{ (cu } \vec{I} \text{ în urmă).}$$



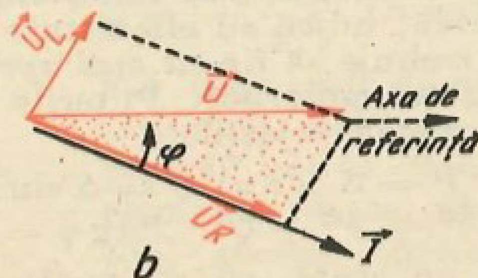


Fig. 2.30

Să presupunem cunoscut vectorul $\vec{I}$. Vectorii $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ şi vectorul sumă $\vec{U}$ se reprezintă atunci ca în figura 2.30, *b*.

Din această diagramă vectorială rezultă

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = (R^2 + \omega^2 L^2) I^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R},$$

deoarece triunghiul cu laturile U, U_R şi U_L este dreptunghic. Din aceste relaţii *obţinem impedanţa* şi *defazajul* circuitului:

$$\frac{U}{I} = \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\ ; \quad \boxed{\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}}. \qquad (2.24)$$

Unghiul φ este pozitiv şi are valori cuprinse între zero şi $\pi/2$ rad.

• **Curentul** este defazat în urma tensiunii cu unghiul φ şi are *valoarea efectivă* $I = U/Z$.

Expresia instantanee a curentului este

$$\boxed{i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}\right).} \qquad (2.25)$$

• **Triunghiul tensiunilor.** Valorile efective ale căderilor de tensiune rezistivă şi inductivă satisfac relaţiile

$$U_R = RI = U \cos \varphi;$$
$$U_L = \omega L I = U \sin \varphi,$$

aşa cum se observă din triunghiul tensiunilor cu laturile U, U_R şi U_L, construit în figura 2.31, *a*.

• Pornind de la triunghiul tensiunilor, putem construi două triunghiuri asemenea: **triunghiul impedanţelor** (fig. 2.31, *b*) cu laturile Z, R şi X şi **triunghiul puterilor** (fig. 2.31, *c*) cu laturile S, P şi Q. Pentru aceasta să observăm că prin împărţirea la I a valorilor efective U_R şi U_L obţinem

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I} \cos \varphi = Z \cos \varphi; \; X = \omega L = \frac{U_L}{I} = \frac{U}{I} \sin \varphi = Z \sin \varphi,$$

iar prin înmulţirea cu I rezultă

$$U_R I = RI^2 = UI \cos \varphi = P; \; U_L I = \omega L I^2 = UI \sin \varphi = Q.$$

Puterea activă se disipă în rezistor: $P = RI^2$.
Puterea reactivă în circuit este $Q = XI^2 = \omega L I^2 > 0$.
Puterea aparentă este $S = UI = ZI^2 = U^2/Z$.

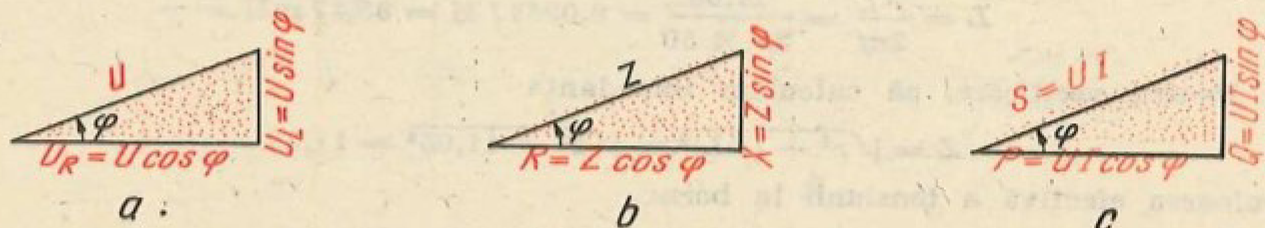


Fig. 2.31

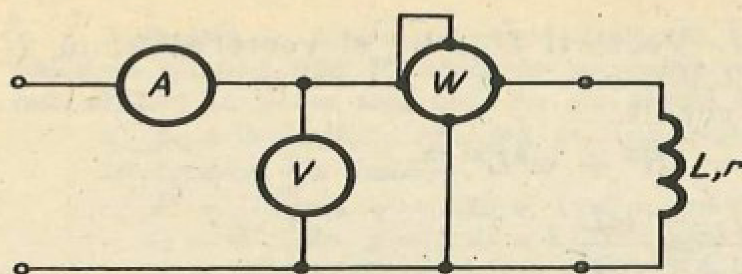


Fig. 2.32

Aplicaţia 1. *Circuitul R, L serie echivalent unei bobine are L = 4,2 mH şi R = 6,1 Ω. Să se calculeze:*

a) *reactanţa şi impedanţa bobinei;*

b) *valoarea efectivă a curentului absorbit de la o sursă de tensiune avînd valoarea efectivă U = 10 V. Frecvenţa tensiunii de alimentare este f = 2 500 Hz.*

a) $X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 2\,500 \times \times 4{,}2 \cdot 10^{-3} = 65{,}97\ \Omega \cong 66\ \Omega$;

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{6{,}1^2 + 66^2} = 66{,}25\ \Omega.$$

b) $I = U/Z = 10/66{,}25 = 0{,}15094\ \text{A} \cong 151\ \text{mA}$.

Aplicaţia 2. *Să se calculeze puterile activă, reactivă şi aparentă într-un circuit R, L serie avînd rezistenţa 3 Ω şi reactanţa 4 Ω, străbătut de un curent de valoare efectivă 4 A.*

Deoarece $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \Omega$, tensiunea la borne are valoarea efectivă $U = ZI = 5 \times 4 = 20$ V. Defazajul este $\varphi = \text{arc tg}\,(X/R) = \text{arc tg}\,(4/3) = 53{,}10°$. Prin urmare:

$$P = UI \cos\varphi = 20 \times 4 \times \cos 53{,}13° = 48\ \text{W};$$

$$Q = UI \sin\varphi = 20 \times 4 \times \sin 53{,}13° = 64\ \text{var};$$

$$S = UI = 20 \times 4 = 80\ \text{VA}.$$

Aplicaţia 3. *Pentru măsurarea parametrilor r, L ai unei bobine reale se realizează montajul experimental din figura 2.32, alimentat la o tensiune de frecvenţă industrială f = 50 Hz. Curentul prin circuit se stabileşte la 2 A. Să se calculeze r şi L dacă voltmetrul indică 23,5 V şi watmetrul 16 W. Se va neglija influenţa rezistenţelor aparatelor de măsurat.*

Watmetrul indică puterea activă disipată în rezistenţa r a înfăşurării bobinei. Deci

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{16}{2^2} = 4\ \Omega.$$

Puterea aparentă primită de bobină pe la borne este

$$S = UI = 23{,}5 \times 2 = 47\ \text{VA}.$$

Dar $P = S\cos\varphi$ şi deci

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{16}{47} = 0{,}340 \rightarrow \sin\varphi = 0{,}940.$$

Puterea reactivă este

$$Q = S\sin\varphi = 47 \times 0{,}940 = 44{,}19\ \text{var}.$$

Însă

$$Q = X_L I^2 \rightarrow X_L = Q/I^2 = 44{,}19/2^2 = 11{,}05\ \Omega.$$

Deci

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{11{,}05}{2\pi \times 50} = 0{,}03517\ \text{H} = 35{,}17\ \text{mH}.$$

Pentru verificare, să calculăm impedanţa

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{2^2 + 11{,}05^2} = 11{,}75$$

şi valoarea efectivă a tensiunii la borne

$$U = ZI = 11{,}75 \times 2 = 23{,}5\ \text{V}.$$

Circuitul alcătuit prin înserierea unui rezistor R cu un condensator C (fig. 2.33, *a*) are tensiunea la borne $u = U\sqrt{2}\sin \omega t$. Să rezolvăm circuitul cu ajutorul reprezentării vectoriale, așa cum s-a rezolvat circuitul R, L serie.

• **Impedanța și defazajul.** Tensiunea la borne este suma tensiunilor pe elemente. Între vectorii asociați este valabilă relația

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C.$$

Dar

$$U_R = RI \quad \text{și} \quad \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I \text{ și } \vec{U}_C \perp \vec{I} \text{ (cu } \vec{I} \text{ înainte)},$$

astfel că diagrama vectorială este cea indicată în figura 2.33, *b*. Din diagramă deducem

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right];$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{\omega CR},$$

deoarece triunghiul cu laturile U, U_R și U_C este dreptunghic și defazajul, considerat de la curent spre tensiune, este negativ (apare în sens invers trigonometric).

Impedanța și *defazajul* sînt:

$$\frac{U}{I} = \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\ ; \quad \boxed{\varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega CR}} \tag{2.26}$$

Unghiul de defazaj poate lua valori cuprinse între $-\pi/2$ radiani și zero.

• **Curentul** în circuitul R, C serie are *valoarea efectivă* $I = U/Z$ și este defazat înaintea tensiunii. *Valoarea lui instantanee* va fi

$$\boxed{i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\omega CR}\right)} \tag{2.27}$$

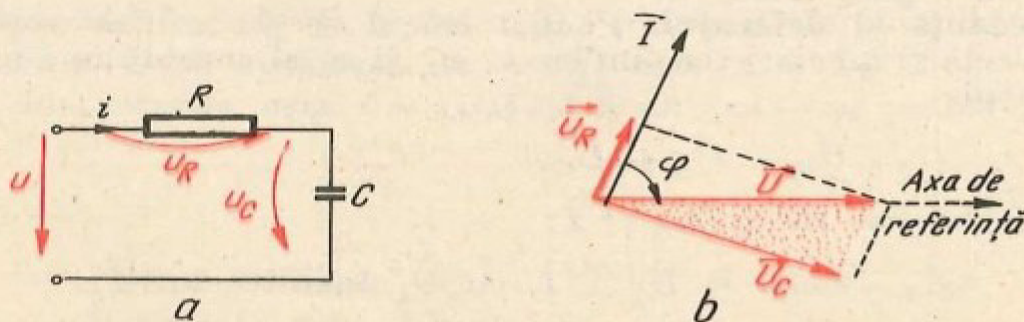


Fig. 2.33

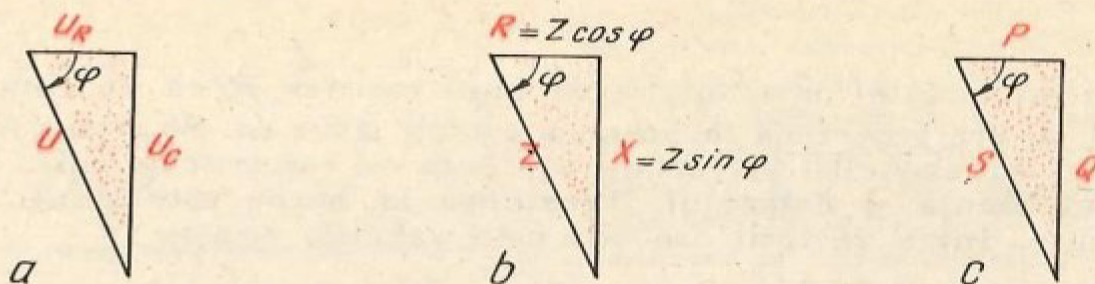


Fig. 2.34

• Pe baza diagramei vectoriale se pot construi **triunghiul tensiunilor,** cu laturile U, U_R și U_C (fig. 2.34, *a*), **triunghiul impedanțelor,** cu laturile Z, R și X (fig. 2.34, *b*) și **triunghiul puterilor,** cu laturile S, P și Q (fig. 2.34, *c*). Se observă că reactanța circuitului este $X = Z \sin \varphi$ și rezultă negativă, deoarece $\varphi < 0$.

Puterile în circuit sînt:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 > 0 \quad \textit{(puterea activă);}$$
$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 < 0 \quad \textit{(puterea reactivă);}$$
$$S = UI = ZI^2 = U^2/Z > 0 \quad \textit{(puterea aparentă).}$$

Puterea reactivă Q este de asemenea negativă, deoarece $\varphi < 0$. Deci, circuitul fiind capacitiv, *reactanța și puterea reactivă sînt negative, ca la un condensator ideal.*

Aplicație. *Un circuit este alcătuit dintr-un condensator de 4 μF și un rezistor de 470 Ω. Valoarea efectivă a curentului prin circuit este de 0,1 A la 500 Hz. Să se calculeze:*

a) *reactanța și impedanța circuitului;*

b) *puterile activă și reactivă în circuit.*

a) $X_C = \dfrac{-1}{2\pi fC} = -(2\pi \times 500 \times 4 \cdot 10^{-6})^{-1} = -79,58\ \Omega;$

$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{470^2 + 79,59^2} = 476,69\ \Omega.$

b) Puterea activă este disipată numai în rezistor. Deci

$$P = RI^2 = 470 \times 10^{-2} = 4,7\ \text{W}.$$

Puterea reactivă a condensatorului este

$$Q_C = -79,58 \times 10^{-2} = -0,7958\ \text{var}.$$

5. Circuitul *R, L, C* serie. Rezonanța de tensiune

Circuitul R, L, C în care elementele de circuit sînt legate în serie este reprezentat în figura 2.35, *a*.

• **Impedanța și defazajul.** Pentru calcul se va utiliza reprezentarea vectorială. Vectorii asociați tensiunilor u, u_R și u_L și curentului i prin circuit satisfac relațiile

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C;$$
$$U_R = RI \text{ și } \vec{U}_R \uparrow\uparrow \vec{I};$$
$$U_L = \omega LI \text{ și } \vec{U}_L \perp \vec{I}, \text{ cu } \vec{U}_L \text{ înaintea lui } \vec{I};$$
$$U_C = \frac{1}{\omega C} I \text{ și } \vec{U}_C \perp \vec{I}, \text{ cu } \vec{U}_C \text{ în urma lui } \vec{I}.$$

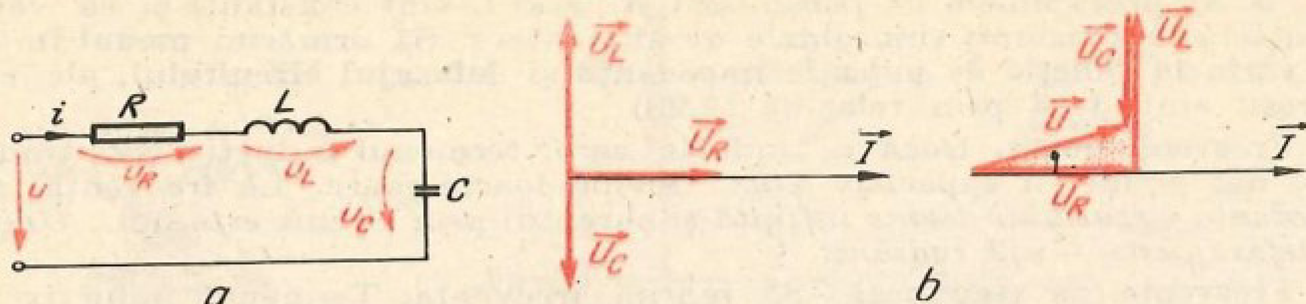


Fig. 2.35

Diagrama vectorială corespunzătoare acestor relaţii, construită în ipoteza $U_L > U_C$, este indicată în figura 2.35, *b*. Din triunghiul dreptunghic cu laturile U, U_R şi $U_X = U_L - U_C$, rezultă:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2;$$
$$\text{tg } \varphi = (U_L - U_C)/U_R.$$

Înlocuind valorile efective ale căderilor de tensiune cu expresiile lor, obţinem

$$U^2 = I^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right];$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Prin urmare, ***impedanţa circuitului*** şi ***defazajul*** sînt:

$$\frac{U}{I} = \boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\;; \quad \boxed{\varphi = \text{arc tg}\,\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}} \qquad (2.28)$$

În ipoteza admisă: $U_L > U_C$, $\omega L > 1/\omega C$, defazajul rezultă pozitiv. Curentul este defazat în urma tensiunii şi de aceea spunem că *circuitul se comportă inductiv*.

• Cunoscînd impedanţa şi defazajul, putem determina **curentul instantaneu** absorbit. Dacă tensiunea la borne este $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, expresia curentului instantaneu este $i = (U/Z)\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi)$, adică

$$\boxed{i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \text{arc tg}\,\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right)} \qquad (2.29)$$

• Să presupunem că parametrii R, L şi C sînt constanţi şi că variem pulsaţia ω a tensiunii sinusoidale de alimentare. Să urmărim **modul în care vor varia în funcţie de pulsaţie impedanţa şi defazajul circuitului,** ale căror expresii sînt date prin relaţiile (2.28).

Frecvenţe joase. Dacă ω tinde la zero, termenul inductiv ωL tinde la zero, dar termenul capacitiv $1/\omega C$ devine foarte mare. La frecvenţă zero, *impedanţa circuitului devine infinită* şi curentul prin circuit este nul. *Unghiul de defazaj este* $-\pi/2$ *radiani.*

Frecvenţa de rezonanţă. Să mărim frecvenţa. Termenul inductiv ωL creşte, termenul capacitiv scade. Diferenţa lor descreşte şi impedanţa circuitului scade. Constatăm că la frecvenţa la care

$$\boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C}} \tag{2.30}$$

impedanţa circuitului este minimă şi egală cu rezistenţa R din circuit, iar *defazajul este nul.* Atunci cînd condiţia (2.30) este îndeplinită, se spune că circuitul R, L, C serie este la rezonanţă. Pulsaţia de rezonanţă şi frecvenţa de rezonanţă vor fi:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}\ ; \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}\ . \tag{2.31}$$

Frecvenţe înalte. Să mărim frecvenţa dincolo de frecvenţa de rezonanţă. Impedanţa devine din nou mai mare decît R. Defazajul creşte. Cînd frecvenţa devine foarte mare, termenul inductiv ωL creşte foarte mult, *impedanţa devine de asemenea foarte mare* şi *unghiul de defazaj se apropie de* $+\pi/2$ *radiani.*

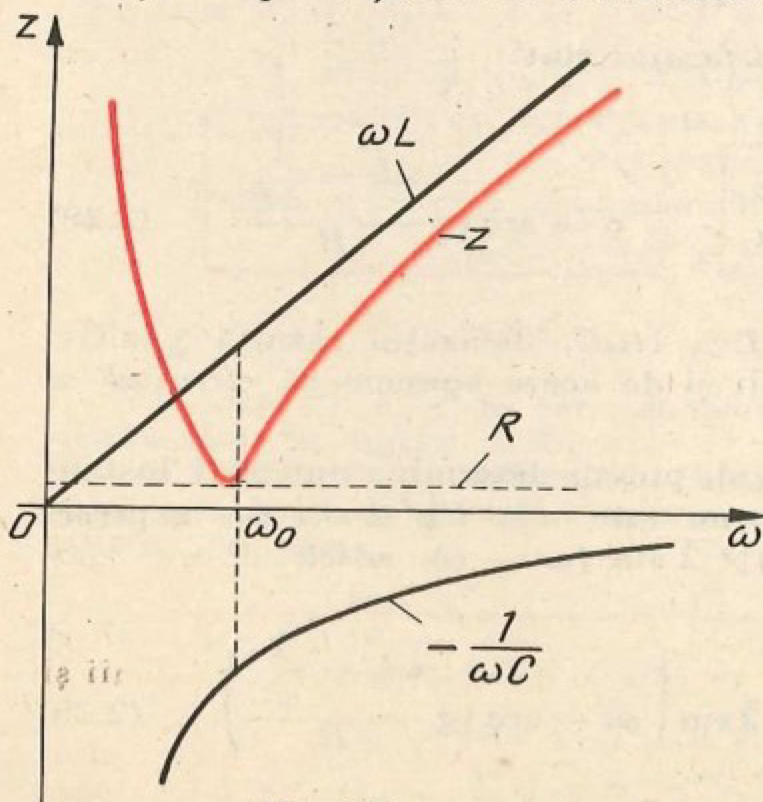


Fig. 2.36

Variaţia impedanţei cu pulsaţia este arătată în figura 2.36.

○ **Concluzii.** Atunci cînd circuitul R, L, C serie este alimentat cu o tensiune sinusoidală de aceeaşi frecvenţă cu cea de rezonanţă, se manifestă următoarele proprietăţi: defazajul este nul; impedanţa este minimă; tensiunea şi curentul sînt în fază; căderile de tensiune la bornele bobinei şi condensatorului au valori efective egale; curentul prin circuit este minim; căderile de tensiune pe bobină şi condensator sînt maxime; puterea reactivă este nulă.

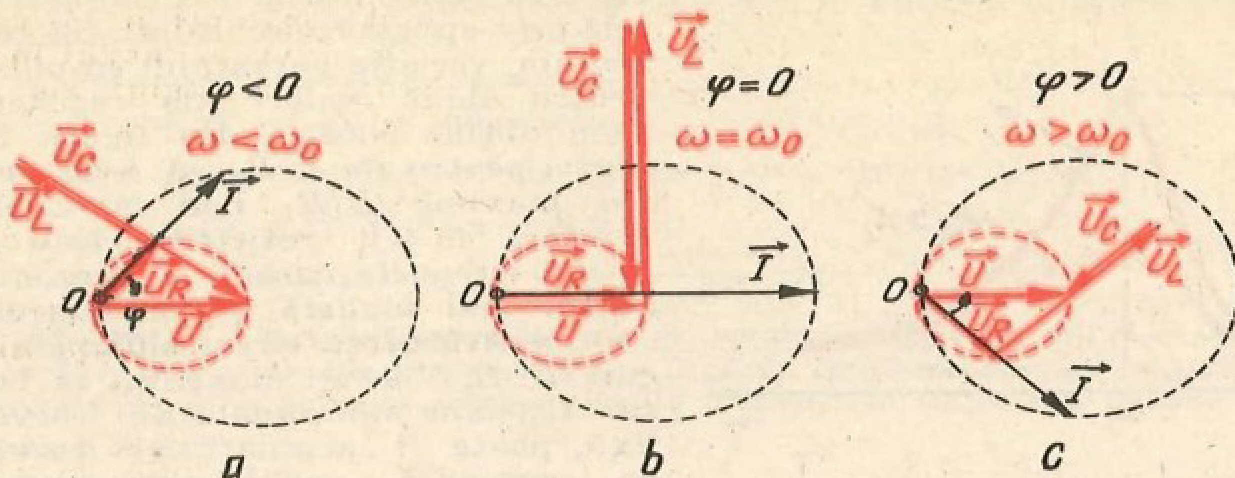


Fig. 2.37

• **Modul de variaţie cu pulsaţia a curentului şi a căderilor de tensiune pe bobină şi pe condensator** pot fi urmărite pe cele trei diagrame vectoriale din figura 2.37.

Să observăm mai întîi că, deoarece triunghiul cu laturile U, U_R şi $U_X = U_L - U_C$ este dreptunghic şi are ipotenuza U constantă, vîrful vectorului $\vec{U}_R$ trebuie să descrie un cerc cu diametrul U. Se mai observă că, deoarece $\vec{U} = R\vec{I}$ vîrful vectorului $\vec{I}$ descrie de asemenea un cerc, cu diametrul U/R.

Frecvenţe joase. Dacă frecvenţa este nulă, vectorii $\vec{I}$ şi $\vec{U}_R$ se află în punctul 0. Mărim pulsaţia pînă la o valoare $\omega < \omega_0$. Curentul prin circuit a crescut, este defazat înaintea tensiunii, deoarece $U_L < U_C$ (fig. 2.37, *a*) şi *circuitul se comportă capacitiv*.

La rezonanţă (fig. 2.37, *b*) curentul prin circuit este maxim, este în fază cu tensiunea la borne, iar căderile de tensiune pe bobină şi condensator:

$$U_L \Big|_{\omega_0} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} U;$$

$$U_C \Big|_{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{1}{\omega_0 C R} U = \frac{\omega_0 L}{R} U$$

ating valorile maxime şi circuitul se comportă pur rezistiv.

○ **Notă.** Deoarece căderile de tensiune pe bobină şi condensator trec, la rezonanţă, prin valorile lor maxime, *rezonanţa serie* se mai numeşte *rezonanţă de tensiune*.

Frecvenţe înalte. Dincolo de rezonanţă, la o pulsaţie $\omega > \omega_0$ (fig. 2.37, *c*) curentul scade sub valoarea de la rezonanţă, este defazat în urma tensiunii şi *circuitul se comportă inductiv*.

Rezistenţa circuitului influenţează curba de rezonanţă a curentului. Să admitem că L şi C sînt constante şi că o tensiune sinusoidală de valoare

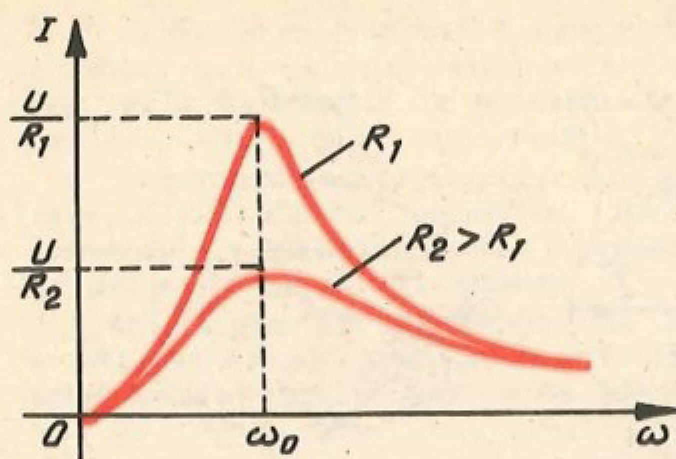


Fig. 2.38

efectivă constantă și frecvență variabilă este aplicată circuitului. Să reprezentăm variația curentului cu pulsația pentru două valori ale rezistenței. Vom obține curbele din figura 2.38. Curba pentru $R_1 < R_2$ va avea valoarea maximă U/R_1 mai mare. Prin urmare, cu cît rezistența este mai mică, cu atît curba de rezonanță devine mai îngustă și mai ascuțită.

• **Acordarea circuitului.** Un circuit R, L, C serie, alimentat la borne sub tensiune sinusoidală de frecvență fixă, poate fi „acordat" pe frecvența de rezonanță variind de exemplu capacitatea condensatorului (inductivitatea L și rezistența R fiind menținute constante). Într-adevăr, variind pe C pînă la C_0 astfel ca $\omega L = 1/\omega C_0$, obținem rezonanța.

• **Factorul de calitate al circuitului.** Să observăm că la rezonanță tensiunile pe bobină și condensator sînt mai mari decît tensiunea de alimentare, în raportul

$$\frac{U_L|_{\omega_0}}{U} = \frac{U_C|_{\omega_0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Factorul

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \tag{2.32}$$

se numește *factorul de calitate al circuitului rezonant*. El este cu atît mai mare cu cît rezistența circuitului este mai mică față de reactanța inductivă de la rezonanță.

În circuitele rezonante utilizate în radiotehnică, factorul de calitate atinge valori foarte mari, de ordinul sutelor. Circuitele cu rezonanță de tensiune pot fi deci utilizate la amplificarea unor tensiuni slabe.

• Să calculăm **diferența valorilor medii ale energiei magnetice și electrice acumulate în circuit.** Obținem

$$\widetilde{W}_m - \widetilde{W}_e = \frac{1}{2} L\widetilde{i^2} - \frac{1}{2} C\widetilde{u_C^2} = \frac{1}{2} LI^2 - \frac{1}{2} CU_C^2 =$$

$$= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{I^2}{2\omega} = \frac{Q}{2\omega},$$

ceea ce ne permite să interpretăm puterea reactivă ca o măsură a necompensării (în medie) a schimburilor interioare de energie între cîmpul magnetic și cîmpul electric.

Aplicația 1. *O bobină de inductivitate 12,4 mH și rezistență 6 Ω este înseriată cu un condensator de 5,6 nF. Să se calculeze:*

a) *pulsația și frecvența de rezonanță;*

b) *factorul de calitate al circuitului.*

a) $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (12,4 \cdot 10^{-3} \times 5,6 \cdot 10^{-9})^{-1/2} = 120 \cdot 10^3$ rad/s;

$f_0 = \omega_0/2\pi = 120 \cdot 10^3/2\pi = 19,1$ kHz.

b) $Q_0 = \omega_0 L/R = 120 \cdot 10^3 \times 12,4 \cdot 10^{-3}/6 = 272$.

Aplicația 2. *Un circuit rezonant serie cu parametrii $C = 120$ pF, $L = 0,2110$ mH și $R = 100$ Ω are frecvența de rezonanță $f_0 = 1$ MHz. Dacă tensiunea aplicată are valoarea efectivă 0,1 V, să se calculeze valoarea efectivă a căderii de tensiune pe rezistor la:*

a) *1 MHz;*

b) *0,9 MHz.*

a) În adevăr:

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (0,2110 \cdot 10^{-3} \times 120 \cdot 10^{-12})^{-1/2} = 6,284 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \rightarrow f_0 = 1 \text{ MHz}.$$

Deci $U_R = U = 0,1$ V la $f_1 = 1$ MHz.

b) $X = \omega_2 L - 1/\omega_2 C = 2\pi \times 0,9 \cdot 10^6 \times 0,2110 \cdot 10^{-3} - (2\pi \times 0,9 \cdot 10^6 \times 120 \cdot 10^{-12})^{-1} =$

$$= 514,6\ \Omega;\ Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{100^2 + 514,6^2} = 524,22\ \Omega;$$

$$U_R = RI = (R/Z)U = (100/524,22) \times 0,1 = 0,0190 \text{ V la } f_2 = 0,9 \text{ MHz}.$$

Raportul celor două valori este 0,1/0,019 = 5,26. La frecvența de rezonanță se obține o tensiune de 5,26 ori mai mare decît la o frecvență mai mică cu 10%.

6. Circuitul R, L, C paralel. Rezonanța de curent

Legarea în paralel a celor trei elemente R, L, C este arătată în schema din figura 2.39.

• **Antirezonanță.** Deoarece reactanța bobinei crește cu frecvența și reactanța condensatorului scade cu frecvența, iar cele două reactanțe au semne contrare, va exista o frecvență la care tensiunea u aplicată și curentul i total sînt în fază; la această frecvență se manifestă un fenomen de rezonanță ca și în circuitul R, L, C serie. Comportarea la rezonanță va fi exact opusă ca la circuitul serie; de aceea fenomenul se mai numește *antirezonanță*.

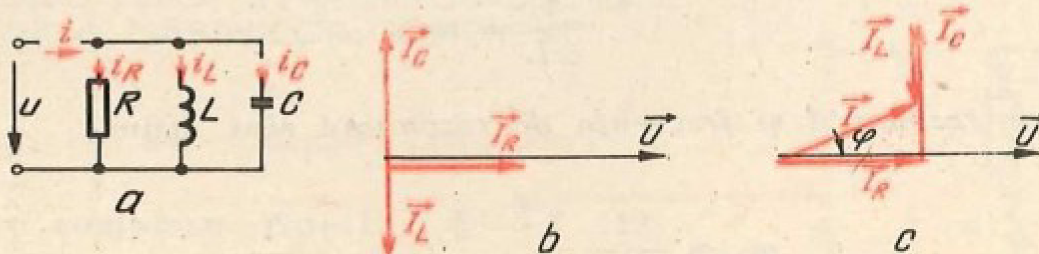


Fig. 2.39

• **Admitanța și defazajul.** Să scriem relațiile vectoriale în circuit. Cu notațiile din figura 2.39 vom obține

$$i = i_R + i_C + i_L \rightarrow \vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_C + \vec{I}_L, \quad (2.33)$$

la care se adaugă relațiile corespunzătoare între tensiunea și curentul pe cele trei elemente

$$U = RI_R \text{ și } \vec{U} \uparrow\uparrow \vec{I}_R; \quad (2.34)$$

$$U = \omega L I_L \text{ și } \vec{I}_L \perp \vec{U} \text{ (în urmă)}; \quad (2.35)$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I_C \text{ și } \vec{I}_C \perp \vec{U} \text{ (înainte)}. \quad (2.36)$$

Diagrama vectorială este indicată în figurile 2.39, *b* și *c*. Din triunghiul cu laturile I, I_R și $I_X = I_C - I_L$ se deduce

$$I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2; \; \text{tg}\, \varphi = -\frac{I_C - I_L}{I_R}.$$

Înlocuind curenții I_R, I_L și I_C cu relațiile (2.34), (2.35) și (2.36), obținem

$$I^2 = U^2\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2\right]; \; \text{tg}\, \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega L} - \omega CR.$$

Admitanța și *defazajul* sînt deci

$$\boxed{\frac{I}{U} = Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \; ; \; \boxed{\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR\right)} \quad (2.37)$$

• **Variația admitanței și defazajului cu pulsația.** Se observă că defazajul se anulează la frecvența la care

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Pulsația de rezonanță și *frecvența de rezonanță* sînt atunci

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \; ; \; \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

și au aceleași expresii ca și la circuitul *R, L, C* serie.

Să analizăm circuitul la rezonanță. *Admitanța este minimă* și are valoarea

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R} = \min(Y).$$

Dacă frecvența crește sau scade față de valoarea de rezonanță, admitanța crește, impedanța $Z = 1/Y$ scade și prin urmare curentul total prin circuit crește. Curbele de variație ale acestor mărimi sînt reprezentate în figura 2.40.

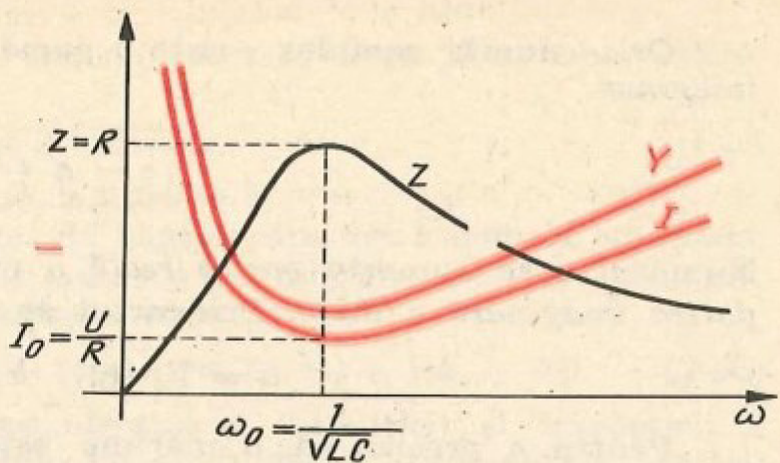


Fig. 2.40

• **Variația curentului cu pulsația.** Curenții prin bobină și condensator ating valorile lor maxime la rezonanță și sînt de Q_0 ori mai mari decît curentul total $I_0 = \frac{U}{R}$ absorbit la rezonanță:

$$I_L\Big|_{\omega_0} = \frac{U}{\omega_0 L} = I_0 \frac{R}{\omega_0 L} = Q_0 I_0;$$

$$I_C\Big|_{\omega_0} = \omega_0 CU = I_0 \frac{\omega_0 C}{R} = Q_0 I_0, \qquad (2.38)$$

unde $Q_0 = R/\omega_0 L$ este factorul de calitate al circuitului. De aceea rezonanța în circuitul paralel se numește *rezonanță de curent.*

• **Circuit L, C.** Circuitul paralel care are cea mai largă aplicație practică este circuitul cu două ramuri din figura 2.41. Acest circuit are multe dintre proprietățile circuitului din figura 2.39, *a*. Astfel, la rezonanță admitanța este minimă, impedanța — maximă, curentul total este minim și curenții prin cele două ramuri ating valori maxime. Frecvența de rezonanță este apropiată de ω_0 dat prin relația (2.31), dacă $\omega_0 L \gg r$.

E. STUDIUL CIRCUITELOR ÎN REGIM SINUSOIDAL CU AJUTORUL MĂRIMILOR COMPLEXE

1. Proprietăți ale numerelor complexe

• **Numere complexe.** Numărul $\sqrt{-4} = 2j$, unde $j = \sqrt{-1}$, este un *număr imaginar.*

○ **Observație.** Am notat unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ cu j, pentru a evita confuzii cu simbolul i al curentului.

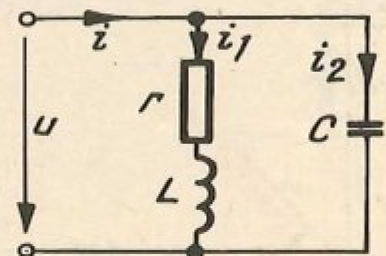


Fig. 2.41

Orice **număr complex** $\underline{c}$ este *o sumă dintre un număr real și un număr imaginar:*

$$\boxed{\underline{c} = a + \mathrm{j}b}\,. \tag{2.39}$$

Numărul a se numește *partea reală* a numărului complex $\underline{c}$; $\mathrm{j}b$ se numește *partea imaginară* a lui $\underline{c}$. Prescurtat se scrie:

$$a = \mathrm{Re}\{\underline{c}\}, \quad b = \mathrm{Im}\{\underline{c}\}. \tag{2.40}$$

Pentru a preciza că o mărime este complexă folosim sublinierea (de exemplu $\underline{c}$).

În orice ecuație cu numere complexe, partea reală a membrului drept al ecuației este egală cu partea reală a membrului stîng și partea imaginară a membrului drept este egală cu partea imaginară a membrului stîng.

• **Reprezentarea numerelor complexe în planul complex și scrierea trigonometrică a acestora.** În acest plan, axa absciselor se numește *axă reală* și se indică, de obicei, prin simbolul $+1$ al unității reale. Axa ordonatelor se numește *axa imaginară* și se notează cu $+\mathrm{j}$.

Numerele complexe se reprezintă în planul complex prin puncte. În figura 2.42 numărul complex $\underline{c}$ este reprezentat prin punctul C, numit *afixul* lui $\underline{c}$. Abscisa lui C este partea reală a lui $\underline{c}$; ordonata lui C este partea imaginară.

○ **Observație.** Prin corespondența dintre numerele complexe și punctele planului complex *se asociază biunivoc fiecărui număr complex $\underline{c}$ un vector liber în plan: $\overrightarrow{OC}$.* Se obișnuiește ca numărul complex $\underline{c}$, afixul C și vectorul $\overrightarrow{OC}$ să se simbolizeze și să se noteze la fel: $\underline{c}$. Deoarece $OA = a, OB = b$, rezultă $OC = \sqrt{a^2 + b^2}$ și $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{b}{a}$ Numărul real și pozitiv

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.41}$$

se numește *modulul numărului complex* $\underline{c}$ și se notează $|\underline{c}|$.

Numărul real

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\, b/a \lesseqgtr 0 \tag{2.42}$$

se numește *argumentul numărului complex* $\underline{c}$ și se notează $\arg\{\underline{c}\}$.

Numărul complex $\underline{c}$ se poate scrie sub formă exponențială și respectiv trigonometrică:

$$\boxed{\underline{c} = r e^{\mathrm{j}\alpha} = r\cos\alpha + \mathrm{j}r\sin\alpha} \tag{2.43}$$

Forma trigonometrică rezultă direct, deoarece în triunghiul dreptunghic AOC catetele sînt:

$$a = r\cos\alpha; \quad b = r\sin\alpha. \tag{2.44}$$

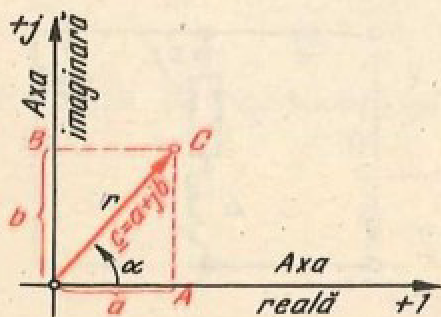


Fig. 2.42

Forma exponențială este mai greu de obținut. Nu vom include aici o demonstrație, dar vom reține identitatea

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \qquad (2.45)$$

pe baza căreia putem face ușor trecerea de la o formă la alta.

• **Operații cu numere complexe.** Să considerăm două numere complexe $\underline{c}_1$ și $\underline{c}_2$. Numerele complexe *se adună sau se scad* adunînd, respectiv scăzînd, părțile reale separat și părțile imaginare separat:

$$\underline{c}_1 \pm \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2). \qquad (2.46)$$

Forma exponențială ne permite efectuarea înmulțirii și împărțirii a două numere complexe operînd numai cu modulele și argumentele. Astfel, numerele complexe *se înmulțesc* înmulțind modulele și adunînd argumentele:

$$\underline{c}_1\underline{c}_2 = (r_1 e^{j\alpha_1})(r_2 e^{j\alpha_2}) = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}. \qquad (2.47)$$

Numerele complexe *se împart* împărțind modulele și scăzînd argumentele:

$$\frac{\underline{c}_1}{\underline{c}_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}. \qquad (2.48)$$

• Numărul complex $\underline{c}^* = a - jb = re^{-j\alpha}$ se numește **conjugatul numărului complex** $c = a + jb = re^{+j\alpha}$. Se observă că

$$\underline{c}\,\underline{c}^* = re^{+j\alpha} re^{-j\alpha} = r^2 = a^2 + b^2.$$

Aplicația 1. *Să se pună numărul complex* $\underline{a} = 10\, e^{j\pi/4}$ *sub formă trigonometrică.*

Deoarece $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = 0{,}707$ și $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45° = 0{,}707$, rezultă:

$$10\, e^{j\pi/4} = 10 \cos 45° + j\, 10 \sin 45° = 7{,}07 + j\, 7{,}07.$$

Acest număr complex este reprezentat în figura 2.43.

Aplicația 2. *Să se exprime* $2 + j5$ *în formă exponențială.*

$$r = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5{,}37;$$

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{5}{2} = 68{,}2° = 1{,}19 \text{ radiani.}$$

Prin urmare $2 + j5 = 5{,}37\, e^{j1{,}19}$ (fig. 2.44).

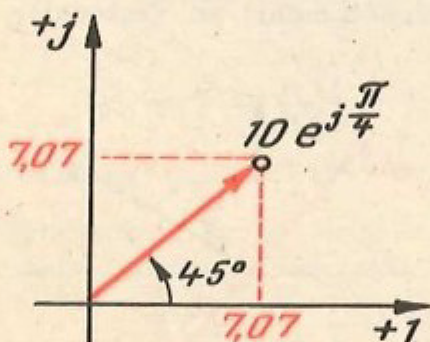


Fig. 2.43

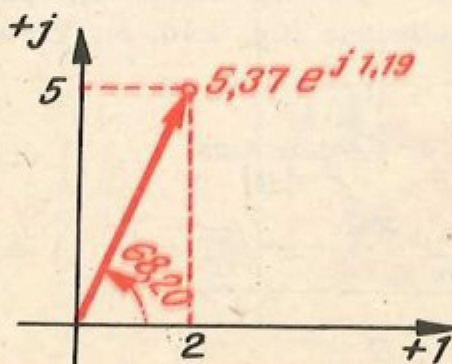


Fig. 2.44

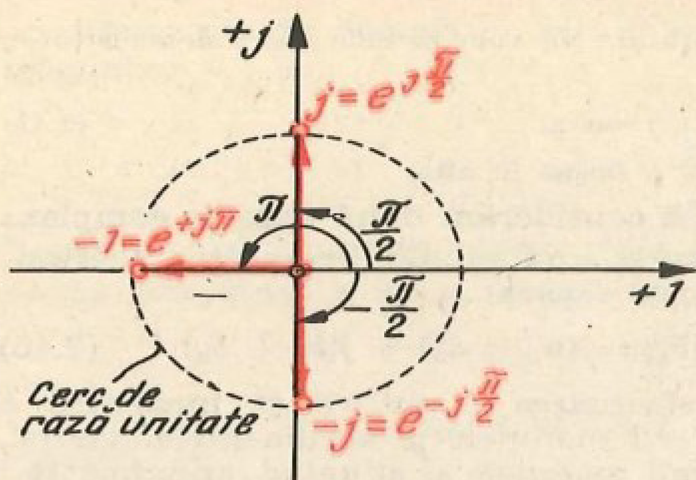


Fig. 2.45

Aplicația 3. *Să se arate că*

$$e^{j\pi/2} = j;\ e^{-j\pi/2} = -j;\ e^{\pm j\pi} = -1.$$

Aplicînd succesiv formula (2.45) obținem

$$e^{j\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = +j;$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j;$$

$$e^{\pm j\pi} = \cos(\pm\pi) + j\sin(\pm\pi) = -1.$$

Reprezentarea în planul complex a acestor numere este indicată în figura 2.45.

Aplicația 4. *Numărul complex $\underline{c}$ se înmulțește cu factorul real a. Să se arate că această operație înseamnă amplificarea vectorului reprezentativ cu factorul real a.*

Utilizînd forma exponențială a lui $\underline{c}$ obținem

$$a\underline{c} = ar\,e^{j\alpha},$$

ceea ce înseamnă că numai modulul este multiplicat cu factorul real. Vectorii $\underline{c}$ și $a\underline{c}$ sînt coliniari.

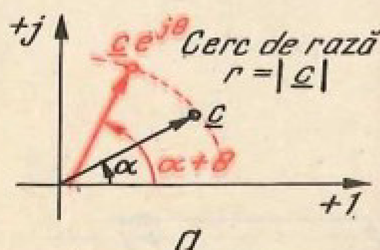
Aplicația 5. *Numărul complex $\underline{c}$ se înmulțește cu factorul complex $e^{j\theta}$ de modul unitar. Să se arate că aceasta înseamnă rotirea vectorului $\underline{c}$ cu unghiul θ și să se particularizeze pentru $\theta = \pi/2$ și $\theta = -\pi/2$ (b).*

a) Apelînd ca și în aplicația *4* la forma exponențială, obținem

$$\underline{c}e^{j\theta} = \underline{c}e^{j\alpha}\,e^{j\theta} = \underline{c}e^{j(\alpha+\theta)}.$$

Vectorul rezultant are modul c, dar argumentul a crescut cu unghiul θ; vectorul s-a rotit deci, în sens direct, cu unghiul θ (fig. 2.46, *a*).

b) Înmulțirea lui $\underline{c}$ cu $j = e^{j\pi/2}$ înseamnă rotirea lui $\underline{c}$ cu $\pi/2$ în sens direct, iar înmulțirea cu $-j = 1/j$ (adică împărțirea cu j) înseamnă rotirea lui $\underline{c}$ cu $\pi/2$ în sens invers trigonometric (fig. 2.46, *b*). Vectorii $\pm j\underline{c}$ sînt perpendiculari pe vectorul $\underline{c}$.



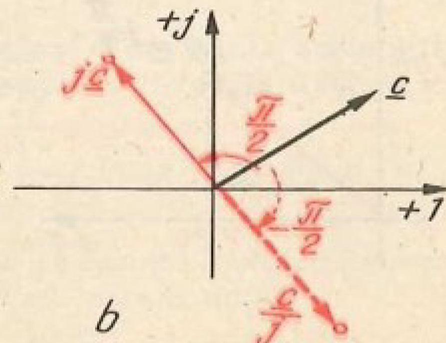


Fig. 2.46

2. Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Fazori

În reprezentarea vectorială *se folosește proprietatea funcțiilor sinusoidale de a putea fi puse în corespondență cu vectorii liberi din plan.*

Din algebra numerelor complexe știm că oricărui număr complex îi corespunde în mod biunivoc un punct în planul complex și deci îi corespunde și vectorul de poziție al acestuia. Identificînd planul vectorilor liberi cu planul complex, putem stabili o corespondență biunivocă între mulțimea funcțiilor sinusoidale de timp și mulțimea numerelor complexe. Ajungem astfel la o reprezentare analitică a funcțiilor sinusoidale, denumită *reprezentarea în planul complex:*

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightarrow I : I/\underline{\gamma} \rightarrow \underline{I} = \underline{I}e^{j\gamma}.$$

În reprezentarea în complex, unei mărimi sinusoidale $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$ i se asociază numărul complex $\underline{I}$, al cărui modul este egal cu valoarea efectivă și al cărui argument este egal cu faza inițială. Scriem prescurtat această corespondență biunivocă sub forma

$$\boxed{i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma) \rightleftarrows \underline{I} = Ie^{j\gamma}} \qquad (2.49)$$

Mărimea $\underline{I}$, reprezentare în complex a mărimii sinusoidale i, se numește *fazorul* $\underline{I}$.

Trecerea de la o mărime sinusoidală la fazorul asociat și, reciproc, de la fazor la mărimea sinusoidală, se realizează aplicînd direct relația (2.49).

Ca și reprezentarea vectorială, reprezentarea în complex se bazează pe observația că mărimile sinusoidale dintr-un circuit electric avînd toate aceeași frecvență, pot diferi între ele numai prin valoarea efectivă și faza inițială și deci sînt complet caracterizate prin perechi de numere reale (I, γ). Numerele complexe fiind de asemenea complet caracterizate prin perechi de numere reale, pot fi puse în corespondență cu mărimile sinusoidale.

Aplicația 1. *Să se determine fazorul curentului:*

$$i = 2\sqrt{2}\sin(314t - \pi/3)\ [\mathrm{A}]$$

și să se reprezinte în planul complex.

În reprezentarea în complex, curentului i se asociază fazorul

$$\underline{I} = 2\ e^{j(-\pi/3)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 - j\sqrt{3},$$

reprezentat în figura 2.47.

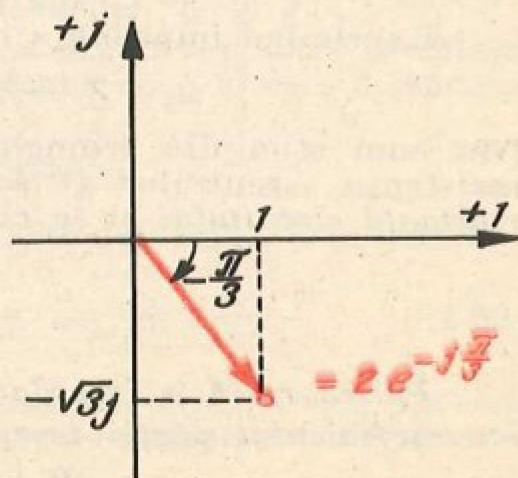


Fig. 2.47

Aplicația 2. *Să se scrie expresia instantanee a curentului al cărui fazor este*

$$\underline{I} = -3 + 4j\ [\mathrm{A}].$$

Deoarece:

$$\mathrm{Re}(\underline{I}) = -3;\quad \mathrm{Im}(\underline{I}) = 4,$$

modulul și argumentul sînt:

$$I = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A}; \ \gamma = \arg(\underline{I}) = \frac{\pi}{2} + \text{arc tg}\,\frac{3}{4} = 143{,}12°.$$

Putem deci scrie:

$$i = 5\sqrt{2} \sin (\omega t + 143°{,}12) \text{ A}.$$

3. Caracterizarea în complex a circuitelor dipolare

Un circuit dipolar, liniar și pasiv, sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta)$, absoarbe curentul sinusoidal $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \gamma)$. Fazorii tensiune la borne și curent sînt

$$u \rightleftarrows \underline{U} = Ue^{j\beta}; \quad i \rightleftarrows \underline{I} = Ie^{j\gamma}.$$

● Se numește **impedanță complexă a circuitului** *raportul dintre fazorul tensiune la borne și fazorul curent absorbit:*

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}} \tag{2.50}$$

Impedanța complexă este un număr complex. Se notează cu simbolul $\underline{Z}$. Înlocuind expresiile lui $\underline{U}$ și $\underline{I}$ obținem

$$\underline{Z} = \frac{Ue^{j\beta}}{Ie^{j\gamma}} = \frac{U}{I}e^{j(\beta-\gamma)} = Ze^{j\varphi},$$

deoarece $U/I = Z$ este impedanța (scalară), iar $\beta - \gamma = \varphi$ este defazajul dintre tensiune și curent.

Impedanța complexă are modulul egal cu impedanța circuitului și argumentul egal cu defazajul circuitului:

$$|\underline{Z}| = Z; \quad \varphi = \arg(\underline{Z}).$$

Exprimînd impedanța complexă în formă trigonometrică, obținem

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi.$$

Așa cum știm din triunghiul impedanțelor, mărimea $Z\cos\varphi$ se numește *rezistența circuitului* și se notează cu R. Mărimea $Z\sin\varphi$ se numește *reactanța circuitului* și se notează cu X. Putem scrie deci

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX} \tag{2.51}$$

Partea reală a impedanței complexe este egală cu rezistența circuitului, iar coeficientul părții imaginare este egal cu reactanța circuitului:

$$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}; \quad X = \text{Im}\{\underline{Z}\}.$$

Deoarece Z și φ caracterizează complet un circuit dipolar, impedanța complexă descrie de asemenea complet circuitul.

○ **Observație importantă.** *Impedanța complexă nu depinde de $\underline{U}$ și $\underline{I}$, ci numai de parametrii elementelor de circuit și de frecvență.*

• Se numește **admitanță complexă** *raportul dintre fazorul curent și fazorul tensiune aplicată:*

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}} = \frac{Ie^{j\gamma}}{Ue^{j\beta}} = Ye^{-j\varphi}. \quad (2.52)$$

Admitanța complexă are modulul egal cu admitanța $Y = I/U$ a circuitului și argumentul egal cu defazajul cu semn schimbat. Exprimînd admitanța complexă sub formă trigonometrică, obținem:

$$\boxed{\underline{Y} = G + jB} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi.$$

Mărimea $G = Y \cos \varphi$ se numește *conductanța* circuitului.
Mărimea $B = -Y \sin \varphi$ se numește *susceptanța* circuitului.

Aplicație. *Un circuit pasiv dipolar sub tensiunea $u = 24\sqrt{2} \sin \omega t$ absoarbe curentul sinusoidal $i = 2\sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/3)$. Să se calculeze:*

a) *impedanța complexă și admitanța complexă;*

b) *rezistența și reactanța circuitului.*

a) Deoarece $\underline{U} = 24$ și $\underline{I} = 2\, e^{-j\pi/3}$, rezultă

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{24}{2\, e^{-j\pi/3}} = 12\, e^{j\pi/3}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{12\, e^{j\pi/3}} = \frac{1}{12}\, e^{-j\pi/3}.$$

b) $\underline{Z} = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}\right) = 6 + j\, 10{,}39.$

Deci $R = 6\, \Omega$ și $X = 10{,}39\, \Omega$.

4. Puterea aparentă complexă

Puterile activă, reactivă și aparentă se pot calcula direct din soluția în complex a circuitului, cu ajutorul expresiilor fazorilor $\underline{U}$ și $\underline{I}$.

Se numește **putere aparentă complexă** *produsul dintre tensiunea complexă și valoarea conjugată a curentului complex.* Se notează cu $\underline{S}$ și este o mărime complexă. Avem

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\beta} Ue^{-j\gamma} = UI^{j(\beta-\gamma)}.$$

Dar $UI = S$ este puterea aparentă și $\beta - \gamma = \varphi$ este defazajul. Prin urmare:

$$\boxed{\underline{S} = Se^{+j\varphi}} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = \boxed{P + jQ} \quad (2.53)$$

Dacă s-a calculat puterea aparentă complexă, atunci modulul ei este puterea aparentă, partea reală este puterea activă și partea imaginară este puterea reactivă:

$$S = |\underline{S}|,$$
$$P = Re\{\underline{S}\}; \; Q = Im\{\underline{S}\}$$

Aplicație. *Să se calculeze: (a) puterea aparentă complexă pentru circuitul pasiv care, sub tensiunea $u = 120\sqrt{2}\sin\omega t$, absoarbe curentul $i = 2{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t - 30°)$, și apoi să se determine puterile activă, reactivă și aparentă (b).*

a) $\underline{U} = 120$; $\underline{I} = 2{,}5\ e^{-j\pi/6}$;

$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = 120 \times 2{,}5\ e^{+j\pi/6} = 300\ e^{j\pi/6} = 259{,}8 + j\,150.$

b) $S = 300$ VA;

$P = \mathrm{Re}\,\{\underline{S}\} = 259{,}8$ W; $Q = \mathrm{Im}\,\{\underline{S}\} = 150$ var.

5. Elemente pasive ideale de circuit studiate cu fazori

• **Rezistorul ideal,** de rezistență r, absoarbe un curent sinusoidal în fază cu tensiunea sinusoidală aplicată la borne. Deci

$$u = U\sqrt{2}\sin\omega t \rightleftarrows \underline{U} = U; \tag{2.54}$$

$$i = I\sqrt{2}\sin\omega t \rightleftarrows \underline{I} = I. \tag{2.55}$$

Relația între fazorii tensiune și curent este

$$\boxed{\underline{U} = r\underline{I}} \tag{2.56}$$

și se reprezintă ca în diagrama din figura 2.48, *a*.

Impedanța complexă a rezistorului este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = r} \tag{2.57}$$

Apelînd la semnificația impedanței complexe (*v.* subcap. E. 3), rezultă

$$Z = r;\ \varphi = 0;\ R = r;\ X = 0. \tag{2.58}$$

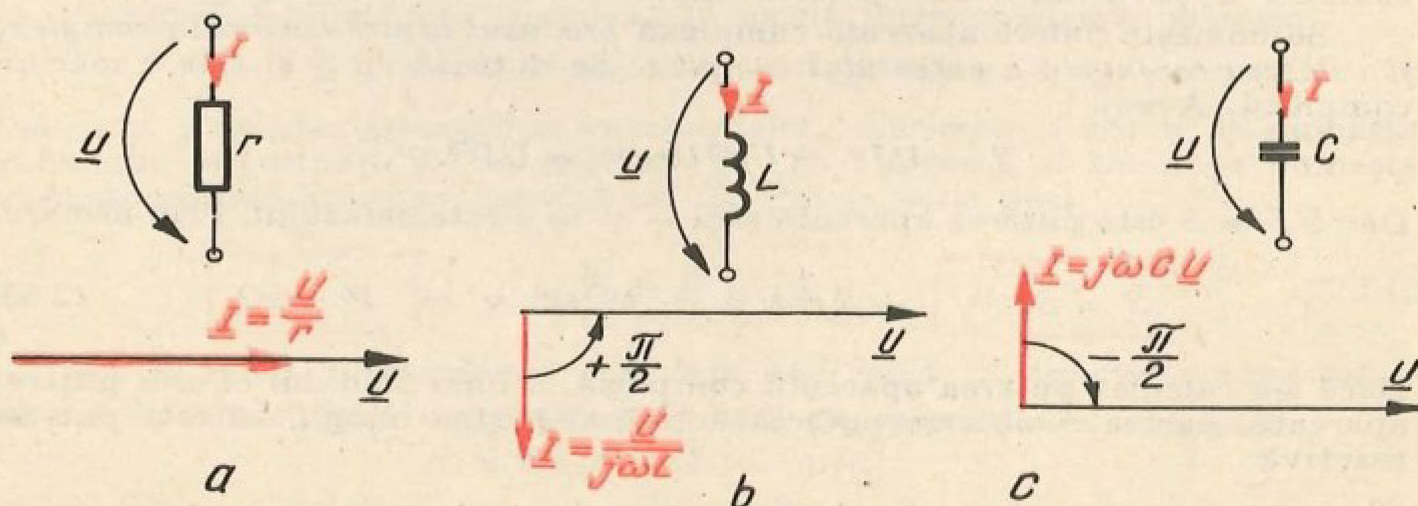


Fig. 2.48

○ **Observație.** Am obținut aceleași rezultate ca cele obținute anterior la studiul elementelor ideale de circuit în regim sinusoidal (v. subcap. C.1).

Puterea complexă, definită în subcap. E.4, are expresia

$$\underline{U}\underline{I}^* = \underline{S} = r\ \underline{I}\ \underline{I}^* = rI^2,$$

deoarece $\underline{I}\underline{I}^* = I^2$ (v. subcap. E.1). Dar $\underline{S} = P + jQ$ și deci

$$P = rI^2 = U^2/r; \quad Q = 0,$$

(v. și subcap. C.1).

• **Bobina ideală,** de inductivitate L, sub tensiunea sinusoidală la borne $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ absoarbe curentul $i = (U/\omega L)\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, (v. subcap. C. 12) defazat în urma tensiunii cu $\pi/2$. Deoarece fazorul curent este

$$\underline{I} = \frac{U}{\omega L}e^{-j\pi/2} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}, \tag{2.59}$$

rezultă

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\underline{I}}\ . \tag{2.60}$$

Fazorul curent prin bobina ideală este reprezentat în figura 2,48, *o*, cu $\frac{\pi}{2}$ în urma lui $\underline{U}$.

Impedanța complexă a bobinei ideale este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = j\omega L}\ . \tag{2.61}$$

○ **Observație.** Regăsim astfel rezultatele obținute anterior (v. subcap. D.1):

$$Z = \omega L, \ \ \varphi = \frac{\pi}{2}, \ \ R = 0, \ \ X = \omega L > 0. \tag{2.62}$$

Puterea aparentă complexă fiind

$$\underline{U}\ \underline{I} = \underline{S} = j\omega L\underline{I}^*\underline{I} = j\omega L\, I^2, \tag{2.63}$$

rezultă:

$$P = 0; \quad Q = \omega LI^2 = U^2/\omega L > 0 \tag{2.64}$$

(v. subcap. C.2).

• **Condensatorul ideal** avînd capacitatea C, sub tensiunea $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ la borne, absoarbe curentul $i = \omega CU\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/2)$ (v. subcap. C.3) al cărui fazor este

$$\underline{I} = \omega CUe^{j\pi/2} \rightarrow \boxed{\underline{I} = j\omega C\underline{U}}$$

Fazorul curent $\underline{I}$ prin condensator apare în diagrama fazorială din figura 2.48, *c* înaintea fazorului tensiune $\underline{U}$ cu unghiul $\pi/2$.

Impedanța complexă a condensatorului ideal este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}. \tag{2.65}$$

Rezultă:

$$Z = \frac{1}{\omega C};\ \varphi = -\frac{\pi}{2};\ R = 0;\ X = -\frac{1}{\omega C} < 0.$$

Puterea complexă este

$$\underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{S} = \frac{I^2}{\mathrm{j}\omega C}.$$

Rezultă atunci

$$P = 0;\ Q = XI^2 = -I^2/\omega C = -\omega C U^2 < 0.$$

Regăsim astfel rezultatele obținute anterior (v. subcap. C.3).

○ **Concluzii.** 1) Pentru elementele de circuit ideale dipolare și pasive, relația tensiune-curent este de forma:

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}.$$

Relația aceasta este cunoscută sub numele de legea lui Ohm, datorită asemănării formale cu relația $U = RI$ cunoscută din studiul curentului continuu.

2) Pentru cele trei elemente ideale de circuit, impedanța complexă este:

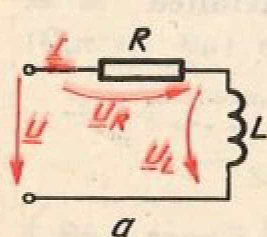
$$\underline{Z} = r;\ \underline{Z} = \mathrm{j}\omega L;\ \underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}.$$

6. Circuite simple studiate cu fazori

Să aplicăm metoda reprezentării în complex la circuitele R, L serie și R, L, C serie studiate anterior cu metoda reprezentării vectoriale (v. subcap. D.3 și D.5).

• Pentru **circuitul R, L serie** (fig. 2.49, a) se poate scrie

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L;\ \underline{U}_R = R\underline{I};\ \underline{U}_L = \mathrm{j}\omega L\underline{I}.$$



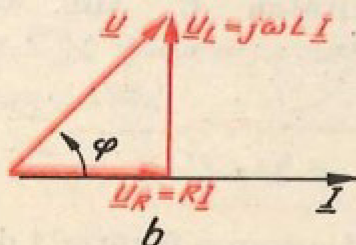


Fig. 2.49

Înlocuind, obținem

$$\underline{U} = (R + \mathrm{j}\omega L)\underline{I},$$

de unde rezultă impedanța complexă a circuitului

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L.} \tag{2.66}$$

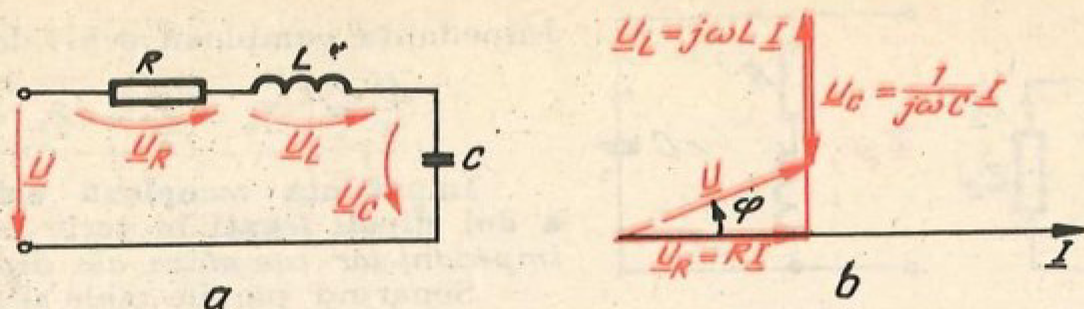


Fig. 2.50

Odată obținută expresia impedanței complexe, putem calcula modulul și argumentul:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L}{R}.$$

Diagrama fazorială este indicată în figura 2.49, *b*.

• **Pentru circuitul *R, L, C* serie** (fig. 2.50, *a*), procedînd similar ca mai sus, obținem relațiile între fazori:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C; \ \underline{U}_R = R\underline{I}; \ \underline{U}_L = j\omega L\underline{I}; \ \underline{U}_C = \frac{I}{j\omega C}\underline{I},$$

din care deducem impedanța complexă a circuitului

$$\underline{U} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I} \rightarrow \boxed{\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (2.67)$$

Modulul impedanței complexe este impedanța circuitului, iar argumentul impedanței complexe este defazajul circuitului. Obținem astfel direct expresiile lui Z și φ deduse în subcap. D.5.

Diagrama fazorială este reprezentantă din figura 2.50, *b*.

Constatăm astfel că, determinînd mai întîi impedanța complexă a circuitului, putem obține apoi relativ simplu impedanța și defazajul circuitului. Studiul circuitelor urmează în continuare aceeași cale ca la metoda reprezentării vectoriale.

7. Conexiunile impedanțelor

• **Doi dipoli pasivi** necuplați inductiv între ei, avînd impedanțele complexe $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$, **legați în serie,** sînt străbătuți de același curent (fig. 2.51).

Tensiunea complexă la borne este

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2.$$

Dar:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\underline{I} \ \text{ și } \ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\underline{I}.$$

Prin urmare

$$\underline{U} = \underline{Z}_1\underline{I} + \underline{Z}_2\underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}.$$

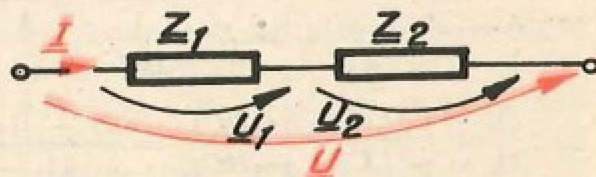


Fig. 2.51

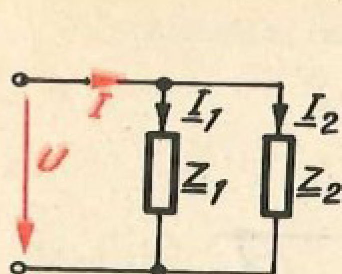


Fig. 2.52

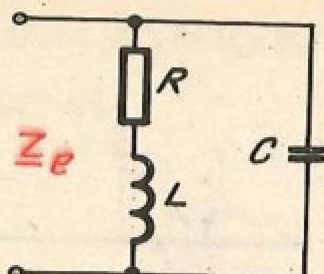


Fig. 2.53

Impedanţa complexă echivalentă este

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \boxed{\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.} \qquad (2.68)$$

Impedanţa complexă echivalentă a doi dipoli legaţi în serie *este suma impedanţelor complexe ale dipolilor.*

Separînd părţile reale şi cele imaginare, se obţin următoarele relaţii:

$$R_e + \mathrm{j}X_e = R_1 + \mathrm{j}X_1 + R_2 + \mathrm{j}X_2 = (R_1 + R_2) + \mathrm{j}(X_1 + X_2);$$

$$R_e = R_1 + R_2; \quad X_e = X_1 + X_2.$$

Prin urmare, la dipoli în serie *rezistenţa echivalentă este suma rezistenţelor dipolilor; reactanţa echivalentă este suma reactanţelor dipolilor.*

• **Doi dipoli pasivi** necuplaţi inductiv între ei, **legaţi în paralel** (fig. 2.52) au aceeaşi tensiune la borne. Obţinem

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right) = \underline{U}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2).$$

Admitanţa complexă echivalentă este

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \boxed{\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2.} \qquad (2.69)$$

Înlocuind admitanţele prin impedanţe, obţinem

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \rightarrow \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{Z}_e.$$

Separînd părţile reale şi imaginare obţinem

$$G_e = G_1 + G_2; \quad B_e = B_1 + B_2.$$

Doi dipoli în paralel au **admitanţa complexă echivalentă** *egală cu suma admitanţelor complexe ale dipolilor*, **conductanţa echivalentă** — *egală cu suma conductanţelor lor*, iar **susceptanţa echivalentă** — *egală cu suma susceptanţelor* lor.

Aplicaţie. *Să se determine impedanţa complexă echivalentă a circuitului R, L, C paralel din figura 2.53.*

Deoarece $\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\omega L$ şi $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$, rezultă

$$\underline{Z}_e = \frac{(R + \mathrm{j}\omega L)\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{(1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(1 - \omega^2 LC - \mathrm{j}\omega RC)}{(1 - \omega^2 LC - \mathrm{j}\omega RC)} = \frac{R + \mathrm{j}(\omega L - \omega^3 L^2 C - \omega R^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} +$$

$$+ \mathrm{j}\,\frac{\omega(L - R^2 C - \omega^2 L^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}.$$

Capitolul 3

CIRCUITE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

A. GENERAREA SISTEMULUI TRIFAZAT DE TENSIUNI ELECTROMOTOARE

În capitolul 2 s-a arătat că rotind o spiră rigidă cu aria A în jurul unei axe de simetrie, cu viteza unghiulară ω, într-un cîmp magnetic uniform şi constant, în spiră se induce o tensiune electromotoare alternativă sinusoidală $e = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$, cu valoarea efectivă $E = \frac{BA\omega}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ BA\omega$.

Faza acestei t.e.m. este egală cu unghiul (măsurat în radiani) format de sensul de referinţă al fluxului (un versor $\vec{n}$ perpendicular pe suprafaţa spirei, cu sensul asociat cu sensul de referinţă al t.e.m. după regula burghiului) cu sensul inducţiei magnetice $\vec{B}$.

• **Sistem simetric de tensiuni electromotoare.** Este de înţeles că rotind simultan trei spire identice fixate rigid pe acelaşi ax, în spire se induc tensiunile electromotoare:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{10}); \\ e_2 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{20}); \\ e_3 = E\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_{30}). \end{cases} \tag{3.1}$$

Fazele iniţiale ale acestor t.e.m. sînt unghiurile formate de sensurile de referinţă ale fluxurilor prin suprafeţele spirelor, cu inducţia magnetică la momentul $t = 0$ (momentul declanşării unui cronometru a cărui indicaţie curentă este t):

$$\alpha_{i0} = \sphericalangle(\vec{n}_i, \vec{B})|_{t=0},\ i = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Tensiunile electromotoare care se induc în spire formează un **sistem simetric de funcţii sinusoidale de timp** *dacă au aceeaşi valoare efectivă şi sînt egal defazate.* Practic, pentru a mări valoarea efectivă a t.e.m. la inducţii magnetice şi turaţii date se utilizează bobine plate cu un număr mare de spire dispuse pe un suport rigid. Valoarea efectivă a t.e.m. induse într-o înfăşurare cu N spire este:

$$E = 0{,}707\ BNA\omega. \tag{3.3}$$

În trei înfășurări identice se induc așadar t.e.m. care au valori efective identice.

Așa cum am spus, ele formează un sistem simetric dacă sînt și egal defazate, adică:

$$\alpha_{10} - \alpha_{20} = \alpha_{20} - \alpha_{30} = \alpha_{30} - \alpha_{10} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.} \tag{3.4}$$

Originea timpului fiind arbitrară, oricare dintre fazele inițiale ale t.e.m. poate fi aleasă nulă. Dacă de exemplu $\alpha_{10} = 0$, din (3.4) rezultă pentru celelalte faze inițiale valorile:

$$\alpha_{20} = -\frac{2\pi}{3} \text{ rad};$$

$$\alpha_{30} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad sau } \alpha_{30} = -\frac{4\pi}{3} \text{ rad.} \tag{3.5}$$

Cu această alegere a originii fazelor, t.e.m. ce formează sistemul simetric sînt:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2} \sin \omega t; \\ e_2 = E\sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \\ e_3 = E\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ sau } e_3 = E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{cases} \tag{3.6}$$

Bobinajele plate în care se induc aceste t.e.m. sînt numite *înfășurări de fază*. Ele sînt egal decalate în spațiu, unghiul între normalele la planele lor fiind egal cu $\frac{2\pi}{3}$ rad. În figura 3.1 se prezintă poziția în spațiu a celor trei înfășurări la momentul $t = 0$.

• **Sistem simetric cu ordinea directă de succesiune a fazelor.** Graficele funcțiilor sinusoidale de timp $e_1(t)$, $e_2(t)$ și $e_3(t)$ date de relația (3.6) sînt prezentate în figura 3.2, unde prin t_{1m}, t_{2m} și t_{3m} se indică momentul la care fiecare dintre tensiunile electromotoare trece prin valoarea maximă. Trecerea prin valoarea maximă este determinată de „trecerea" fiecărei înfășurări printr-o anumită poziție în spațiu. Poziția respectivă este determinată de unghiul format între normala la suprafața bobinajului și inducția magnetică. Tensiunea electromotoare e_1 trece prin valoarea maximă cînd unghiul între normala $\vec{n}_1$ și inducția magnetică devine $\frac{\pi}{2}$ rad. În poziția respectivă liniile inducției magnetice

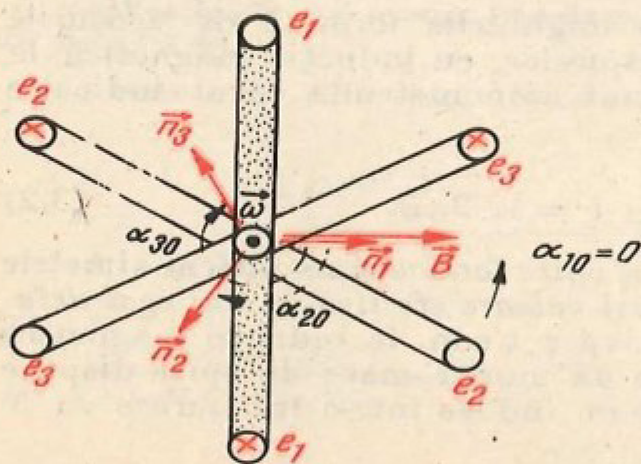


Fig. 3.1

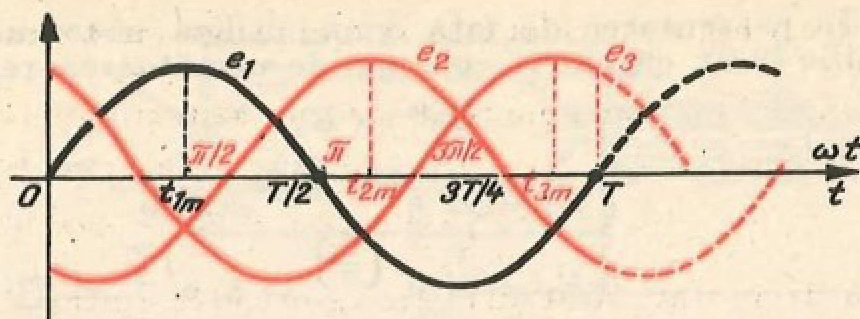


Fig. 3.2

sînt în planul primei înfăşurări. T.e.m. indusă în a doua înfăşurare trece prin valoarea maximă la momentul t_{2m}, la care normala $\vec{n}_2$ ajunge perpendiculară pe inducţia magnetică. Intervalul de timp $t_{2m} - t_{1m}$ se deduce din condiţia ca în acest interval spirele să se rotească cu unghiul de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Deci:

$$t_{2m} - t_{1m} = \frac{2\pi/3}{\omega} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{T}{3} \quad \text{sau} \quad t_{2m} = t_{1m} + \frac{T}{3}.$$

Cea de-a treia t.e.m. trece prin valoarea maximă la momentul t_{m3}, după ce înfăşurarea respectivă s-a rotit faţă de poziţia în care se afla la $t = 0$ cu unghiul $\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ rad. Deci:

$$\omega t_{m3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + \omega t_{m1}.$$

De aici obţinem $t_{m3} - t_{m1} = 2 \cdot \frac{T}{3}$, sau $t_{m3} = t_{m1} + 2 \cdot \frac{T}{3}$.

Aşadar, *tensiunile electromotoare trec prin valoarea maximă în ordinea* e_1, e_2, e_3 *la intervale de timp cu durata* $\frac{T}{3}$ *în care înfăşurările se rotesc cu* $2\pi/3$ *rad.*

Sistemul de t.e.m. dat de relaţiile (3.6), ce se obţin rotind înfăşurările în sens trigonometric, este un *sistem simetric cu ordine directă de succesiune a fazelor.*

• Putem obţine un **sistem simetric de t.e.m. cu ordine inversă de succesiune a fazelor** dacă facem ca t.e.m. să treacă prin valoarea maximă în ordinea e_1, e_3, e_2. Pentru aceasta este suficient să se schimbe sensul de rotaţie. Sistemul simetric de t.e.m. cu ordinea inversă de succesiune a fazelor este dat de:

$$\begin{cases} e_1 = E\sqrt{2} \sin \omega t; \\ e_2 = E\,2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right); \\ e_3 = E\,2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right). \end{cases} \quad (3.7)$$

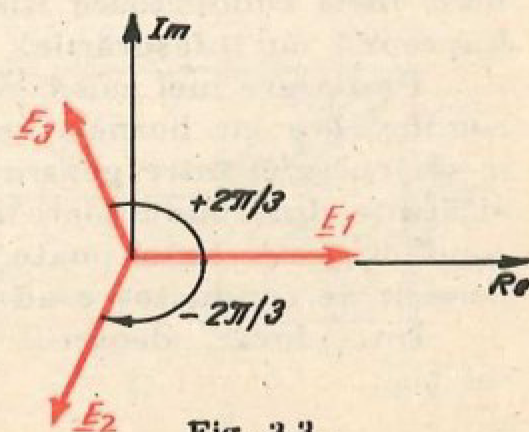


Fig. 3.3

• În prezentarea de față vom utiliza **sistemul cu ordine directă** dat de relațiile (3.6), căruia îi corespunde următoarea **reprezentare fazorială**:

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = E e^{j0} = E; \\ \underline{E}_2 = E\, e^{j\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = E\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \\ \underline{E}_3 = E\, e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = E\, e^{j\frac{2\pi}{3}} = \underline{E}_2^*. \end{cases} \tag{3.8}$$

Introducînd notația:

$$\underline{a} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

relațiile (3.8) se mai scriu și sub forma:

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = E; \\ \underline{E}_2 = \underline{a}E; \\ \underline{E}_3 = \underline{a}^*E. \end{cases} \tag{3.9}$$

Diagrama fazorială din figura 3.3 ne arată că între fazori există relația:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0. \tag{3.9}$$

Relația corespunzătoare între valorile instantanee ale t.e.m. este:

$$(\forall)\ t,\ e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

foarte importantă din punctul de vedere al „asamblării“ celor trei generatoare monofazate în unul singur, pe care-l denumim *generator trifazat*.

B. CONEXIUNILE GENERATOARELOR ȘI RECEPTOARELOR

1. Conexiunea în triunghi (Δ)

Cele trei generatoare monofazate în înfășurările cărora se induc tensiunile electromotoare $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$ și $\underline{E}_3$ ce formează un sistem simetric se pot conecta cu trei receptoare monofazate cu impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ prin intermediul unor inele conductoare izolate între ele și antrenate în mișcare de rotație împreună cu înfășurările.

Pe fiecare inel calcă cîte o perie colectoare prin care se asigură legături conductoare cu bornele receptoarelor monofazate (fig. 3.4). Pentru transmisia energiei între generatoare și receptoare se utilizează trei linii bifilare alcătuite din conductoare ideale, așa cum se arată în figura 3.5. Numărul conductoarelor liniei poate fi redus de la șase la patru dacă în locul fiecărei perechi de conductoare adiacente se prevede un singur conductor (fig. 3.6).

Într-adevăr, deoarece între t.e.m. ale generatoarelor este adevărată relația:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$$

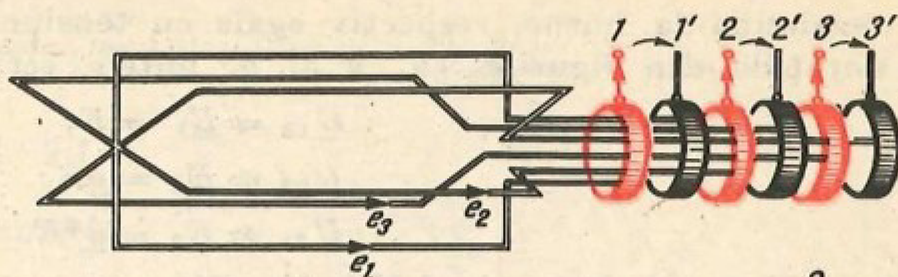


Fig. 3.4

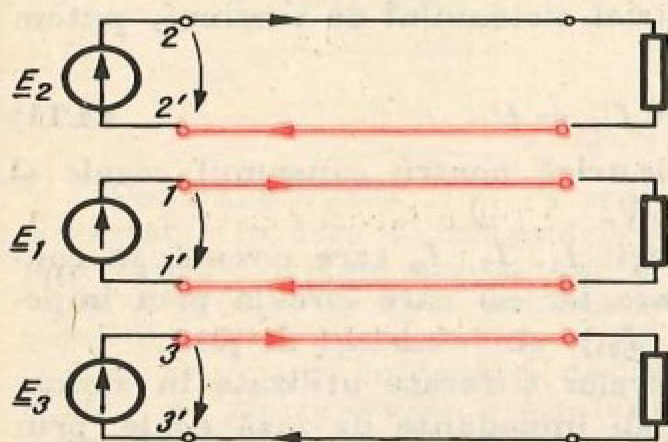
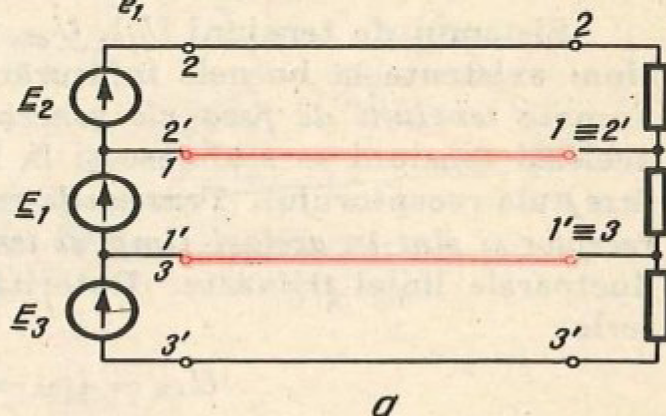


Fig. 3.5



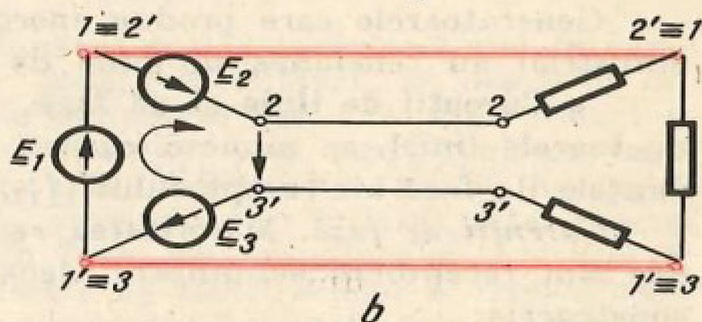


Fig. 33.6

tensiunea între bornele *3'* şi *2* este nulă, aşa cum rezultă din teorema a doua a lui Kirchhoff. Cele două borne pot fi suprapuse fără a modifica regimul de curenţi din circuit. În felul acesta, unul dintre conductoarele liniei legat la bornele *2* sau *3'* se poate înlătura. Ajungem astfel la conexiunea în triunghi atît a înfăşurărilor generatoarelor, cît şi a impedanţelor receptoarelor (fig. 3.7).

• **Tensiunile de fază.** Deoarece înfăşurările de fază ale generatorului trifazat au impedanţe proprii neglijabile, putem reprezenta generatorul prin

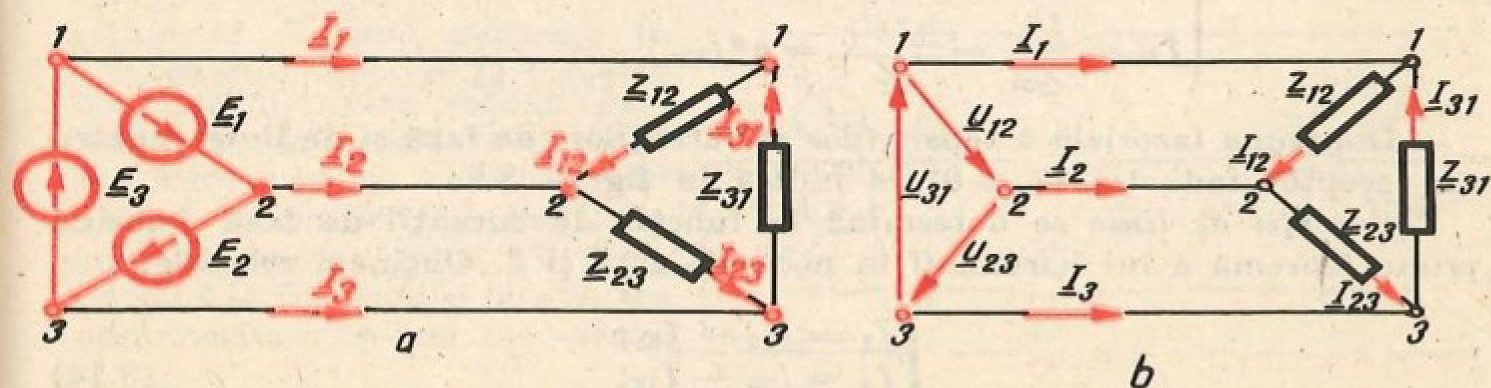


Fig. 3.7

tensiunile la borne, respectiv egale cu tensiunile electromotoare. Urmărind notațiile din figurile 3.7, *a* și *b*, putem scrie:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{E}_1 = \underline{E}; \\ \underline{U}_{23} &= \underline{E}_2 = \underline{a}\underline{E}; \\ \underline{U}_{31} &= \underline{E}_3 = \underline{a}^*\underline{E}. \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Sistemul de tensiuni $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ este un sistem simetric. Aceste tensiuni existente la bornele înfășurărilor de fază ale generatorului trifazat se numesc *tensiuni de fază ale generatorului.* Conductoarele liniei fiind ideale, aceleași tensiuni se stabilesc și la bornele impedanțelor de fază (prescurtat, *faze)* ale receptorului. *Tensiunile respective sînt deci tensiuni de fază și pentru receptor și sînt în același timp și tensiuni de linie*, fiind tensiuni între conductoarele liniei trifazate. Datorită simetriei sistemului de tensiuni, putem scrie:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_f = U_l. \qquad (3.11)$$

Generatoarele care produc energie electrică pentru consumul casnic și industrial au tensiunea de linie de 380 V.

• **Curenții de linie și de fază.** Curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ care circulă în conductoarele liniei se numesc *curenți de linie*, iar cei care circulă prin impedanțele de fază ale receptorului ($\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$) sînt *curenți de fază.*

Curenții de fază. Majoritatea receptoarelor trifazate utilizate în industrie sînt receptoare echilibrate, deoarece au impedanțe de fază egale prin construcție:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = Z\, e^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = R + jX. \qquad (3.12)$$

În acest caz, curenții de fază ai receptorului, care formează un sistem simetric, sînt:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \dfrac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \dfrac{U_f}{\underline{Z}} = \dfrac{U_f}{Z\, e^{j\varphi}} = \dfrac{U_f}{Z}\, e^{-j\varphi} = I_f\, e^{-j\varphi}; \\ \underline{I}_{23} = \dfrac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \dfrac{\underline{a} U_f}{\underline{Z}} = \underline{a}\underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_{31} = \dfrac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \dfrac{\underline{a}^* U_f}{\underline{Z}} = \underline{a}^*\underline{I}_{12}. \end{cases} \qquad (3.13)$$

Diagrama fazorială a tensiunilor și curenților (de fază și de linie) pentru un receptor inductiv ($\varphi > 0$) se indică în figura 3.8.

Curenții de linie se determină în funcție de curenții de fază folosind prima teoremă a lui Kirchhoff în nodurile *1, 2* și *3*. Obținem relațiile:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}; \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Curenţii de linie formează şi ei un sistem simetric, avînd valoarea lor efectivă:

$$I_l = 2I_f \cos\frac{\pi}{6} = 2I_f\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, I_f,$$

aşa cum rezultă din diagrama fazorială.

○ **În concluzie**, pentru conexiunea în triunghi sînt adevărate relaţiile

$$\boxed{U_l = U_f} \qquad \boxed{I_l = \sqrt{3}\, I_f.} \qquad (3.15)$$

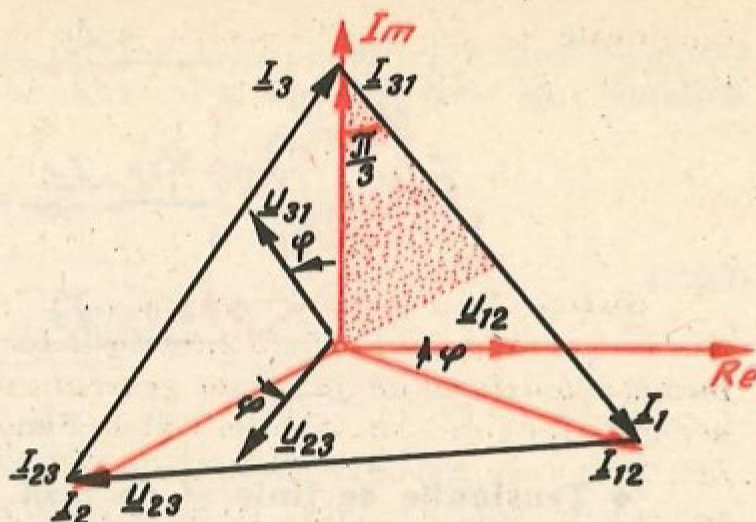


Fig. 3.8

2. Conexiunea în stea (λ)

Pentru a vedea cum se reduce numărul conductoarelor liniei în cazul conexiunii în stea a înfăşurărilor unui generator trifazat, să urmărim din nou figura 3.5. Cele trei conductoare „de întoarcere" ale curenţilor conectate la bornele *1'*, *2'* şi *3'* se pot înlocui cu unul singur prin care circulă curentul total al celor trei conductoare. Se obţine circuitul din figura 3.9. Punctul *O* comun celor trei înfăşurări de fază ale generatorului trifazat este *punctul neutru al generatorului*. Impedanţele de fază ale receptorului prezintă şi ele o bornă comună, *N*, care poartă numele de *punct neutru al receptorului*. Cele două puncte neutre sînt legate prin conductorul neutru, prin care circulă curentul $\underline{I}_0$.

• **Curenţii de linie şi de fază.** Curenţii prin celelalte conductoare ale liniei, denumiţi *curenţi de linie, sînt în acelaşi timp şi curenţi de fază* deoarece circulă şi prin impedanţele de fază ale receptorului. Dacă generatorul trifazat dezvoltă t.e.m. ce alcătuiesc un sistem simetric, iar impedanţele de fază ale receptorului sînt identice, respectiv receptorul este echilibrat, curenţii de fază ai receptorului formează şi ei un sistem simetric de mărimi sinusoidale.

Curentul prin conductorul neutru, dat de prima teoremă a lui Kirchhoff, respectiv:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \qquad (3.16)$$

trebuie să fie nul, deoarece în virtutea simetriei $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Conductorul neutru nefiind parcurs de curent, poate fi suprimat (fig. 3.10) fără a modifica prin aceasta valorile potenţialelor punctelor neutre $\underline{V}_0$ şi $\underline{V}_N$, care continuă să fie egale şi în absenţa conductorului. Putem deci scrie:

$$\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = 0. \qquad (3.17)$$

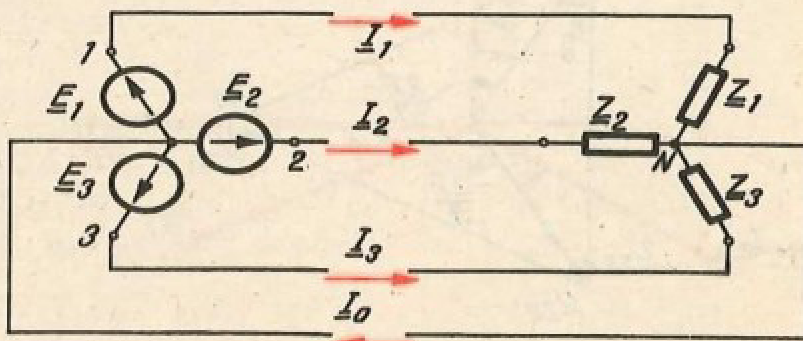


Fig. 3.9

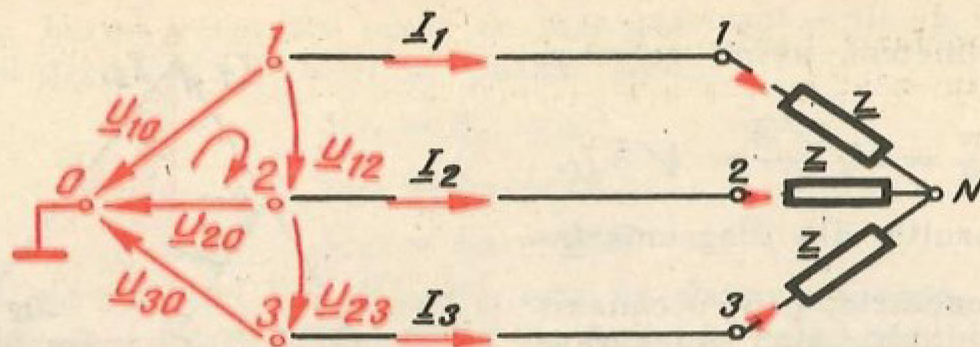


Fig. 3.10

• **Tensiunile de linie și de fază.** În conexiunea în stea, *tensiunile de fază* ale generatorului, egale cu t.e.m. induse în înfășurările de fază, continuă să fie egale cu tensiunile de fază ale receptorului, respectiv:

$$\begin{cases} \underline{U}_{10} = \underline{U}_{1N} = \underline{E}_1 = E = U_f; \\ \underline{U}_{20} = \underline{U}_{2N} = \underline{E}_2 = \underline{a}E = \underline{a}U_f; \\ \underline{U}_{30} = \underline{U}_{3N} = \underline{E}_3 = \underline{a}^*E = \underline{a}^*U_f. \end{cases} \tag{3.18}$$

Tensiunile de linie, diferite de data aceasta de cele de fază, se deduc din teorema a doua a lui Kirchhoff. Astfel, pentru conturul închis indicat în figura 3.10 se poate scrie:

$$0 = -\underline{U}_{10} + \underline{U}_{12} + \underline{U}_{20}.$$

Rezultă de aici:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}. \tag{3.19}$$

Prin permutarea circulară a indicilor rezultă și celelalte două tensiuni de linie:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30};$$
$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10}.$$

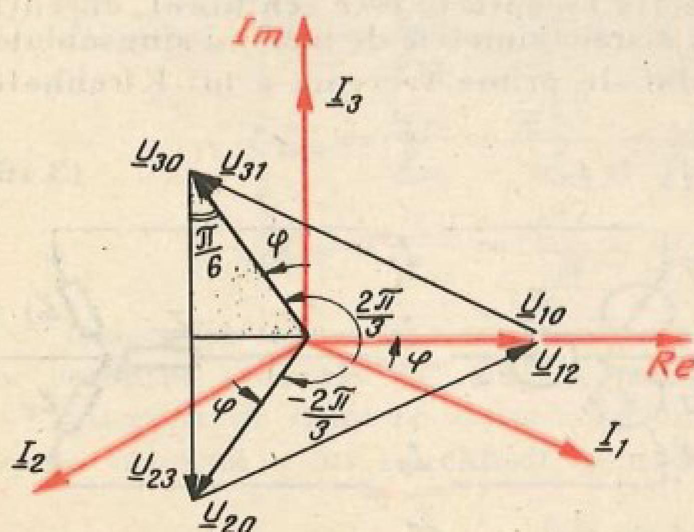


Fig. 3.11

Diagrama fazorială a tensiunilor și curenților pentru un receptor echilibrat, inductiv, se indică în figura 3.11. Din triunghiul hașurat rezultă valoarea efectivă a tensiunii de linie:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_l =$$

$$= 2U_{30}\cos\frac{\pi}{6} = 2 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{2}U_f = \sqrt{3}\,U_f.$$

○ **În concluzie,** pentru conexiunea în stea a impedanţelor unui receptor echilibrat alimentat cu tensiuni ce formează un sistem simetric sînt valabile relaţiile:

$$\boxed{I_l = I_f}$$
$$\boxed{U_l = \sqrt{3}\, U_f} \qquad (3.20)$$

C. PUTERILE ÎN SISTEME TRIFAZATE

1. Conexiunea în triunghi

Puterea aparentă complexă la bornele receptorului trifazat echilibrat alimentat cu tensiuni ce formează un sistem simetric este:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{12}\underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_{31}^*. \qquad (3.21)$$

Pentru tensiuni de fază (linie) date:

$$\underline{U}_{12} = U_f;\ \underline{U}_{23} = \underline{a}U_f \text{ şi } \underline{U}_{31} = \underline{a}^* U_f$$

şi impedanţe egale, curenţii de fază sînt:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \dfrac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \dfrac{U_f}{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \dfrac{U_f}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = I_f\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}; \\ \underline{I}_{23} = \underline{a}\underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_{31} = \underline{a}^*\underline{I}_{12}. \end{cases}$$

Înlocuind în (3.21) şi ţinînd cont de egalitatea $\underline{a}\,\underline{a}^* = |\,\underline{a}\,|^2 = 1$, obţinem:

$$\underline{S}_b = U_f I_f\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \underline{a}U_f \cdot \underline{a}^* I_f\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + U_f \underline{a}^* I_f \underline{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 3U_f I_f\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} =$$
$$= 3U_f I_f \cos\varphi + \mathrm{j}\,3U_f I_f \sin\varphi = P_b + \mathrm{j}\,Q_b.$$

De aici rezultă imediat:

$$\boxed{P_b = 3U_f I_f \cos\varphi}$$
$$\boxed{Q_b = 3U_f I_f \sin\varphi}\,; \qquad (3.22)$$
$$\boxed{S_b = 3U_f I_f}$$

Deoarece $U_f = U_l$ şi $I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$, expresiile puterilor se pot scrie şi sub forma:

$$P_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi$$

$$Q_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin\varphi \qquad (3.23)$$

$$S_b = \sqrt{3}\, U_l I_l.$$

2. Conexiunea în stea (Δ)

Puterea aparentă complexă la bornele receptorului este:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1N}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N}\underline{I}_3^*. \qquad (3.24)$$

Utilizînd notaţiile cunoscute:

$$\underline{U}_{1N} = U_f;\ \underline{U}_{2N} = \underline{a}U_f \text{ şi } \underline{U}_{3N} = \underline{a}^* U_f$$

şi

$$\underline{I}_1 = I_f\, e^{-j\varphi};\ \underline{I}_2 = \underline{a}\underline{I}_1 \text{ şi } \underline{I}_3 = \underline{a}^*\underline{I}_1,$$

obţinem:

$$\underline{S}_b = 3U_f I_f\, e^{j\varphi} = 3U_f I_f \cos\varphi + j\, 3U_f I_f \sin\varphi = P_b + j\, Q_b.$$

De aici rezultă:

$$P_b = 3U_f I_f \cos\varphi$$

$$Q_b = 3U_f I_f \sin\varphi \qquad (3.25)$$

$$S_b = 3U_f I_f.$$

Deoarece în această conexiune:

$$I_f = I_l \text{ şi } U_f = \frac{U}{\sqrt{3}},$$

obţinem şi formele echivalente:

$$P_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos\varphi$$

$$Q_b = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin\varphi \qquad (3.26)$$

$$S_b = \sqrt{3}\, U_l I_l.$$

Capitolul 4

PRODUCEREA ŞI TRANSMITEREA ENERGIEI ELECTRICE

A. GENERALITĂŢI

1. Sistem energetic

Din energia resurselor primare, sub diferitele forme cunoscute: hidraulică, chimică, nucleară, solară, eoliană etc., în *centralele electrice* se obţine energie termică şi electrică. Prin *reţelele de transmisie*, energia produsă de surse (centrale electrice) ajunge la *consumatori*. Aici, energia termică este utilizată ca atare, iar energia electrică este în prealabil convertită de receptoare într-o formă adecvată: mecanică, luminoasă, chimică, termică etc.

Toate instalaţiile aflate pe fluxul comun al energiei, începînd cu amenajările pentru extragerea sau captarea energiei resurselor primare, continuînd cu centralele şi reţelele de transmisie şi terminînd cu instalaţiile de conversie a energiei în forma necesară consumatorilor alcătuiesc **sistemul energetic.**

2. Sistem electric

Partea electrică a sistemului energetic poartă denumirea de **sistem electric (electroenergetic)** *(SE).*

Elementele componente ale *SE* corespund celor trei procese distincte care au loc în instalaţiile sistemului: producerea, transmiterea şi consumul energiei electrice. Astfel:

— *sursele convenţionale* (generatoare sincrone) produc energie electrică; există şi *surse neconvenţionale* (baterii solare, generatoare magnetohidrodinamice *MHD* etc.), care prezintă importanţă locală sau încă nu au depăşit cadrul experimental;

— *reţeaua electroenergetică* transmite consumatorilor energia produsă;

— *receptoarele electrice* ale consumatorilor absorb şi convertesc energia electrică primită.

o **Observaţie.** Producerea şi transmiterea energiei electrice se realizează, de regulă, *în sistem trifazat.*

În figura 4.1 este reprezentată simbolic schema fluxului de energie într-un *SE* (redat parţial).

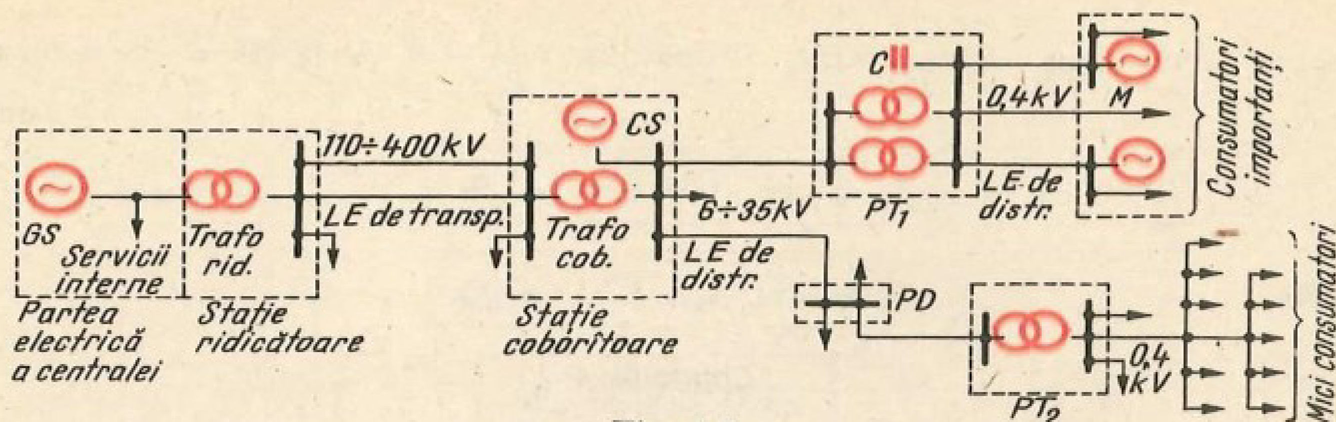


Fig. 4.1

a. *Surse convenționale de energie electrică*

Generatoarele sincrone (GS), instalate în centrale electrice, au puteri unitare cuprinse între cîțiva megawați și 2 000 MW (în țara noastră, limita superioară actuală a puterii unitare este de 330 MW). Energia electrică se produce la tensiuni cuprinse, în general, între 6 și 30 kV, dar există și hidrogeneratoare de puteri mici (sute de kW), cu tensiuni nominale sub 1 kV, deci care debitează energie la joasă tensiune (j.t.).

Generatoarele electrice funcționează la $f = 50$ Hz și furnizează energie sub un anumit factor de putere ($\cos \varphi$).

Din energia produsă de generatoare, o anumită cotă (1—14%) se distribuie serviciilor interne ale centralelor electrice (consum propriu tehnologic), iar restul se transmite în *SE*.

b. *Rețea electrică*

Rețeaua electrică (electroenergetică) preia energia generată de centralele electrice, pentru a o transmite consumatorilor.

Rețeaua cuprinde *stații* și *linii electrice*. Liniile și circuitele electrice din componența rețelei electrice, indiferent de tensiune și destinație, pot fi realizate ca linii electrice aeriene *(LEA)*, sau ca linii electrice subterane *(LES)* prin utilizarea cablurilor îngropate.

• **Stații ridicătoare de tensiune. Linii de transport.** Transmiterea energiei electrice presupune pierderi de energie în elementele rețelei, datorită efectului termic (Joule) al curentului electric. La aceeași putere transportată, cu cît tensiunea este mai ridicată, curenții vor fi mai mici și deci pierderile, proporționale cu pătratul intensității curentului, scad corespunzător. Din acest motiv, primul element al rețelei, aflat în ordinea fluxului energiei imediat după generatoare, este, de regulă, *stația ridicătoare de tensiune*. Aici, cu ajutorul transformatoarelor și autotransformatoarelor, tensiunea electrică este ridicată la valori înalte *(IT)* sau foarte înalte *(FIT)*, corespunzătoare tensiunilor la care funcționează liniile de transport (110—400 kV).

Tensiuni nominale. Costul liniei electrice crește odată cu adoptarea unei tensiuni de serviciu superioare. Prin urmare, va trebui aleasă o valoare a tensiunii care să fie optimă din punct de vedere tehnico-economic. Această valoare, stabilită prin calcule, depinde în special de puterea transmisă și de distanța la care trebuie transmisă energia. Practic, tensiunea nominală a liniei trebuie să aibă una dintre următoarele valori standardizate: 380 V, 6 kV, 10 kV, 20 kV, 35 kV, 110 kV, 220 kV, 400 kV (tensiunea de 35 kV este admisă, dar se recomandă a fi evitată la construirea instalațiilor noi).

Cînd puterile care urmează a fi transportate sau (şi) distanţele respective sînt foarte mari, tensiunile nominale ale liniilor pot depăşi 400 kV.

○ **Notă.** O soluţie avantajoasă în anumite situaţii o constituie *transportul energiei la FIT în curent continuu*. La capetele unei asemenea linii trebuie să existe mutatoare capabile să convertească c.a. în c.c. sau invers, în funcţie de sensul transferului energiei.

• **Staţiile coborîtoare** reduc tensiunea electrică a liniilor de transport la valori medii (6—35 kV) convenabile liniilor de distribuţie. În staţiile coborîtoare de tensiune, mari noduri de consum industrial, se pot instala compensatoare sincrone *(CS)*, care reglează tensiunea pe barele staţiilor, producînd sau absorbind putere reactivă.

• **Reţele de distribuţie.** Distribuirea energiei electrice se realizează la 6—35 kV, uneori la 110 kV — pentru marii consumatori industriali. În figura 4.1 este prezentat un exemplu de distribuire a energiei prin intermediul *liniilor de distribuţie*, al *punctelor de distribuţie (PD)* şi *posturilor de transformare (PT)*. Ultimele realizează reducerea tensiunii la valorile joase (sub 1 kV) necesare micilor consumatori, îndeplinind un rol similar cu cel al staţiilor coborîtoare de tensiune.

• **Legături de interconexiune.** Staţiile de transformare, ridicătoare sau coborîtoare de tensiune, servesc deseori şi la interconectarea elementelor sistemului electric, prin intermediul liniilor de interconexiune. Noţiunile de „sistem" şi „reţea" se bazează tocmai pe existenţa acestor legături electrice multiple între centrale şi staţii.

Principiul interconexiunii se aplică şi în reţelele de distribuţie, cu ajutorul liniilor şi circuitelor electrice de buclare. Acestea asigură, în principiu, legătura între două puncte ale reţelei prin cel puţin două căi de curent diferite.

Consumatorii cu instalaţii electrice mai pretenţioase şi cu consum mare de energie posedă reţele de utilizare proprii în care se aplică, de asemenea, principiul buclării.

Interconectarea şi buclarea prezintă avantaje tehnice şi economice: creşterea siguranţei în funcţionare a sistemului şi în alimentarea cu energie a consumatorilor, îmbunătăţirea parametrilor la care se utilizează energia electrică, reducerea pierderilor de energie în reţele, optimizarea funcţionării centralelor electrice etc. Datorită acestor avantaje, soluţia interconectării se aplică şi sistemelor energetice naţionale învecinate.

c. *Receptoare electrice*

Receptoarele electrice ale consumatorilor funcţionează pe principii foarte diferite, adecvate utilizării energiei obţinute din energia electrică primită.

Tensiunea utilizată poate fi alternativă (monofazată sau trifazată) sau continuă, la valoare potrivită cu puterea şi tipul instalaţiei dar cuprinsă, în general, între cîţiva volţi şi cîteva mii de volţi.

B. COMPENSAREA PUTERII REACTIVE. ÎMBUNĂTĂŢIREA FACTORULUI DE PUTERE

Receptoarele cu ponderea cea mai însemnată în consumul de energie electrică sînt de natură inductivă: motoare asincrone, transformatoare de sudură, cuptoare de inducţie şi cu arc electric, aparate şi dispozitive care

conțin bobine etc. Asemenea receptoare, practic toate instalațiile în care inductivitățile predomină asupra capacităților, determină un consum de putere reactivă inductivă. În aceeași situație se află și circuitele electrice de utilizare a energiei, liniile de distribuție, transformatoarele din stații și posturi de transformare. Rezultă că, de regulă, rețelele de utilizare și distribuție funcționează în regim inductiv.

1. Efectele circulației puterii reactive

Noțiunea de putere reactivă și circulația acesteia între elementele capacitive și cele inductive ale *SE* sînt, precum se cunoaște, convenții adoptate pentru a caracteriza schimbul permanent de energie între cîmpurile electrice și cele magnetice ale elementelor *SE*. La acest schimb participă, cu aport capacitiv sau inductiv, și generatoarele electrice ale sistemului.

Se constată că circulația puterii reactive pe elementele rețelei conduce la următoarele **dezavantaje**:

— *creșterea pierderilor de energie;*
— *pierderi de tensiune;*
— *creșterea investițiilor în centrale și rețele;*
— *reducerea capacității de încărcare.*

a. *Creșterea pierderilor de energie (efect electrocaloric)*

Dacă se ia ca exemplu o linie trifazată cu rezistența R (pe o fază), vehiculînd puterile P (activă) și Q (reactivă) la tensiunea U, pierderile de putere activă (ΔP) în conductoarele liniei se determină astfel:

$$\Delta P = 3RI^2 = R\frac{P^2 + Q^2}{U^2} = R\frac{P^2}{U^2} + R\frac{Q^2}{U^2}, \tag{4.1}$$

deoarece $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \Rightarrow I^2 = \dfrac{P^2 + Q^2}{U^2}$ (S este puterea aparentă).

Se constată că circulația puterii reactive este însoțită de o pierdere de putere activă.

Cu expresia (4.1) se pot calcula pierderile de putere în orice element de rețea (transformator, generator, linie electrică etc.) sau receptor electric la care nu se urmărește obținerea de căldură prin efectul termic al curentului electric.

b. *Pierderi de tensiune*

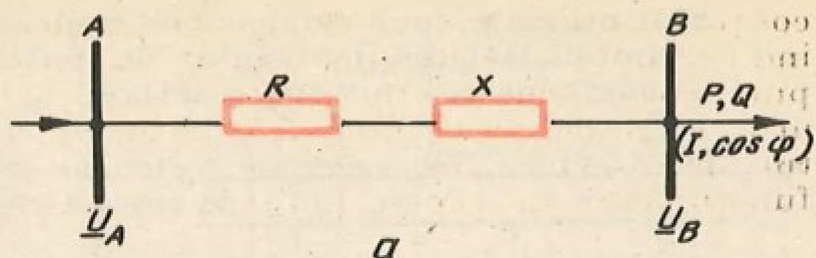
Se cunoaște că valoarea tensiunii este un parametru de calitate al energiei electrice.

În orice element de rețea, caracterizat de parametrii longitudinali R (rezistență) și X (reactanță), transmițînd puterile P și Q sub tensiunea U, apare o pierdere de tensiune (de fază) ΔU între cele două capete:

$$\Delta U = U_A - U_B \cong RI\cos\varphi + XI\sin\varphi = \frac{PR + QX}{U} = \frac{PR}{U} + \frac{QX}{U}. \tag{4.2}$$

Ca exemplu, în figura 4.2, *a* a fost considerat cazul unei linii electrice (schema monofilară), iar în figura 4.2, *b* s-a reprezentat diagrama fazorială a tensiunii şi curentului pe una dintre faze. Relaţia (4.2) se poate deduce simplu pe baza diagramei, proiectînd $\underline{U}_A$ pe $\underline{U}_B$.

Întrucît reactanţa X este comparabilă, ca valoare, cu rezistenţa R (de multe ori o depăşeşte), ponderea puterii Q în valoarea ΔU poate fi comparabilă cu cea a puterii P sau chiar mai mare. Această situaţie poate conduce la variaţii mari ale nivelurilor de tensiune în reţea şi la consumatori, înrăutăţind condiţiile de exploatare a instalaţiilor.



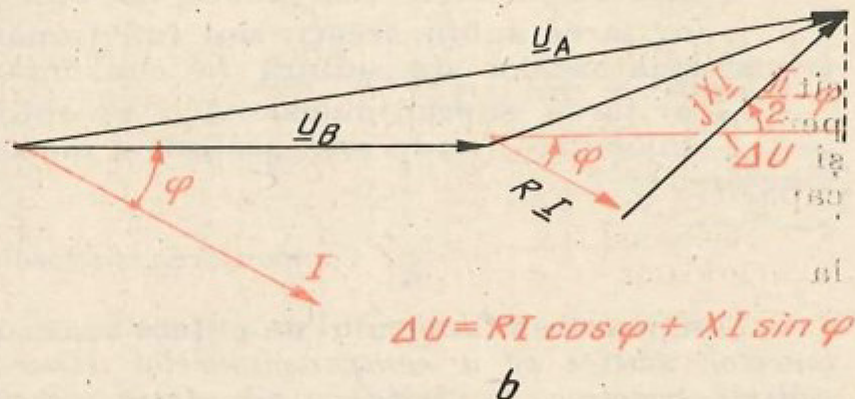


Fig. 4.2

c. Creşterea investiţiilor în centrale şi reţele

În centralele şi staţiile electrice costul generatoarelor şi transformatoarelor creşte odată cu puterea lor instalată:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Se observă că, pe măsura creşterii puterii reactive, creşte şi puterea aparentă deci şi costul. Se tinde ca puterea Q să fie cît mai redusă; totuşi, din anumite motive tehnice, ea nu poate fi coborîtă sub o anumită limită.

Din expresiile (4.1) şi (4.2) se observă că pentru a menţine pierderile ΔP şi ΔU în limite rezonabile chiar în condiţiile creşterii puterii reactive Q, o soluţie ar fi reducerea rezistenţei R prin creşterea secţiunii conductoarelor. O altă soluţie ar fi ridicarea tensiunii de serviciu U. Ambele variante necesită însă costuri suplimentare de investiţie.

o **Observaţie.** Concluziile se aplică întocmai şi receptoarelor electrice.

d. Reducerea capacităţii de încărcare

Pentru o instalaţie dată, spre a nu se depăşi limitele admise ale pierderilor trebuie scăzut transferul de putere activă (P). Rezultă, deci, o diminuare nedorită a capacităţii de încărcare a instalaţiei respective.

2. Mijloace pentru reducerea circulaţiei de putere reactivă

Reducerea circulaţiei de putere reactivă echivalează cu îmbunătăţirea factorului de putere ($\cos\varphi = k_p$), întrucît:

$$Q = \sqrt{3}\, UI \sin\varphi.$$

Sînt utilizate două categorii de mijloace pentru reducerea puterii reactive:
— îmbunătăţirea factorului de putere al receptoarelor;
— compensarea puterii reactive.

a. Îmbunătăţirea factorului de putere al receptoarelor de energie electrică

Există multe posibilităţi de îmbunătăţire a factorului de putere:
— utilizarea unor receptoare cu factor de putere ridicat;
— evitarea subîncărcării sau funcţionării în gol a motoarelor asincrone, transformatoarelor de sudură (a consumatorilor inductivi — în general);
— evitarea supradimensionării receptoarelor;
— înlocuirea (unde este posibil) a motoarelor asincrone mari cu motoare sincrone etc.

b. Compensarea factorului de putere

Compensarea factorului de putere se rezumă practic la *utilizarea condensatoarelor statice şi a compensatoarelor sincrone pentru compensarea locală a puterii reactive, evitîndu-se circulaţia acesteia în reţea.*

- **Compensarea cu condensatoare statice.**

Condensatoarele pot fi instalate *la consumator*, îmbunătăţindu-i astfel factorul de putere sub care absoarbe energia din reţea pînă la (cel puţin) o valoare fixată de întreprinderea furnizoare de electricitate. Această valoare, numită *factor de putere neutral*, este actualmente, în ţara noastră, egal cu 0,93. Pentru $\cos\varphi < 0{,}93$ marii consumatori de energie sînt penalizaţi, iar pentru $\cos\varphi > 0{,}93$ primesc bonificaţii.

Se pot monta condensatoare şi *în instalaţiile întreprinderii furnizoare de electricitate*, pe barele de j.t. ale *PT* sau pe barele de 6—20 kV ale staţiilor coborîtoare de tensiune.

Pentru instalaţiile de joasă tensiune trifazate, **condensatoarele se fabrică,** în obicei, *în construcţie trifazată*, conectate în triunghi, formînd grupe indedendente, spre a se putea cupla în raport de necesităţi. Pentru tensiuni peste 1 kV, condensatoarele sînt *în execuţie monofazată*, putînd fi conectate în stea sau triunghi.

Condensatoarele sînt realizate cu armături din folii de aluminiu şi dielectric din hîrtie uleiată sau pelicule din materiale sintetice. Capacităţile pe o fază ale condensatoarelor industriale destinate compensării puterii reactive variază, în general, între 75 μF şi 600 μF la j.t., respectiv între 0,3 μF şi 5 μF la tensiuni peste 1 kV.

Comanda conectării grupelor de condensatoare se poate face fie *manual*, în raport cu necesităţile de putere reactivă, fie *automat*, în funcţie de valoarea tensiunii pe bara de racord, cu ajutorul unui regulator automat de tensiune *(RAT)*.

În figurile 4.3, *a* şi *b* sînt prezentate două tipuri de scheme pentru conectarea condensatoarelor.

- **Compensatoarele sincrone** *(CS)* sînt maşini sincrone rotative care se instalează pe barele de 2—20 kV ale unor staţii coborîtoare de tensiune, noduri importante de consum. Compensatoarele sincrone produc sau absorb putere reactivă, după cum funcţionează în regim supraexcitat sau subexcitat. Puterea lor aparentă nominală variază în general între 5 şi 50 MVA. Comanda

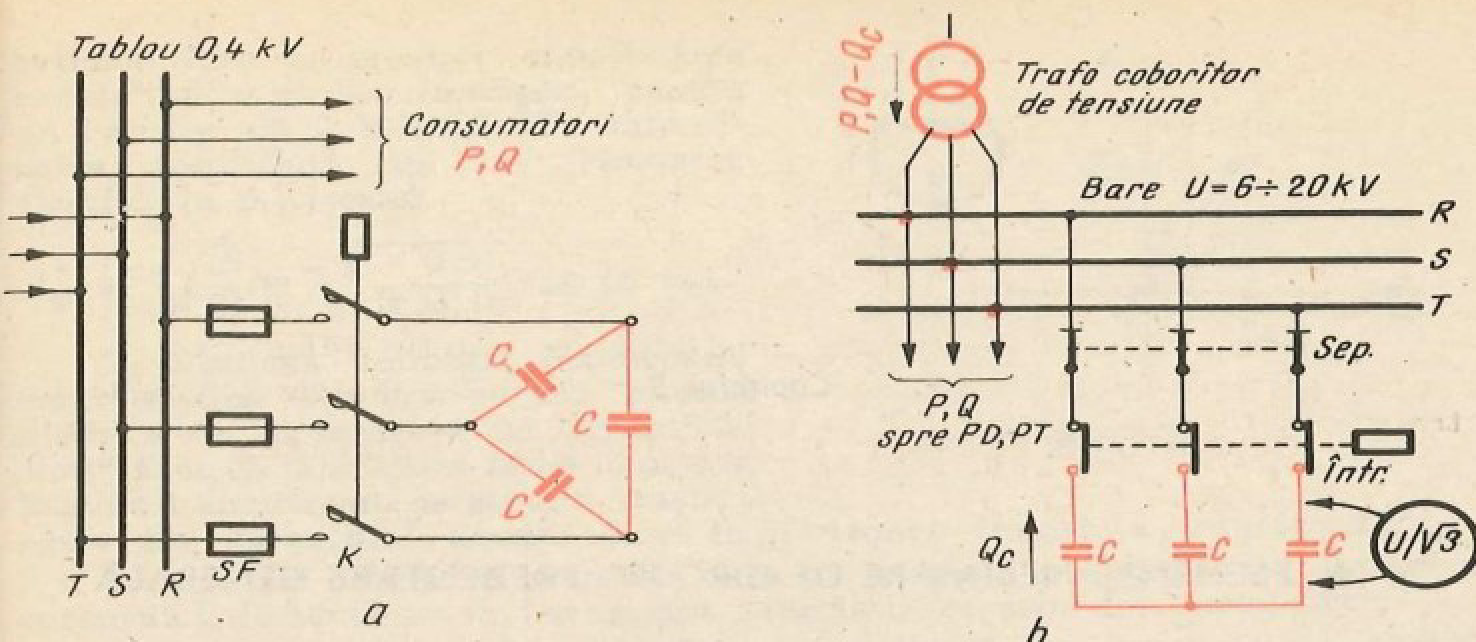


Fig. 4.3

excitației se realizează prin *RAT*, în funcție de valoarea parametrului reglat (tensiunea).

○ **Notă.** La marii consumatori industriali care posedă motoare sincrone *(MS)*, acestea pot realiza, pe lîngă acționarea mașinilor de lucru cu care sînt cuplate, și un reglaj tensiune-putere reactivă, prin modificarea curentului de excitație, întocmai ca la compensatoarele sincrone.

Aplicație. *La bara de 10 kV a unei stații coborîtoare de tensiune cu un consum echivalent $P = 4\,000$ kW, sub $\cos\varphi = 0{,}8$ (inductiv), se conectează o baterie de condensatoare legată în stea, pentru compensarea puterii reactive pînă la factorul de putere echivalent $\cos\varphi_e = 1$ (fig. 4.3, b). Să se calculeze capacitatea necesară C pe fiecare fază și pierderile de putere în transformatorul coborîtor de tensiune al stației, dacă rezistența echivalentă pe o fază a acestuia este $R_T = 0{,}08\ \Omega$.*

Puterea reactivă echivalentă a receptorului Q se determină astfel:

$$Q = \frac{P}{\cos\varphi}\sin\varphi = \frac{4\,000}{0{,}8}\cdot 0{,}6 = 3\,000 \text{ kvar}.$$

Anterior compensării, curentul I_T prin transformator este:

$$I_T = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos\varphi} = \frac{4\,000}{\sqrt{3}\cdot 10\cdot 0{,}8} = 290 \text{ A}.$$

În acest caz, puterea pierdută în transformator este:

$$\Delta P_T = 3\,R_T I_T^2 = 3\cdot 0{,}08\cdot 290^2 = 20{,}2 \text{ kW}.$$

După compensarea (completă) a puterii reactive, $\cos\varphi = 1$ iar curentul I'_T prin transformator va fi.

$$I_T = \frac{P}{\sqrt{3}\,U\cos\varphi} = 232 \text{ A}.$$

În acest caz, puterea pierdută în transformator va fi:

$$\Delta P'_T = 3\cdot 0{,}08\cdot 232^2 = 12{,}9 \text{ kW} < \Delta P_T.$$

Bateria de condensatoare compensează puterea reactivă:

$$Q = |Q_C| = 3\,000 \text{ kvar} = 3\,C\omega\left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Din relația anterioară rezultă capacitatea pe o fază a bateriei:

$$C = 95{,}54\ \mu\text{F}.$$

Capitolul 5

CIRCUITE ELECTRICE ŞI ELECTRONICE NELINIARE

A. ELEMENTE NELINIARE DE CIRCUIT PREZENTARE GENERALĂ

În capitolele precedente ne-am ocupat numai de funcţiunile şi metodele de studiu specifice circuitelor electrice liniare, adică circuitelor electrice alcătuite numai din elemente liniare (cu caracteristică curent-tensiune liniară).

○ **Notă.** Aşa cum se va vedea, *proprietatea elementelor de circuit de a prezenta caracteristici liniare nu este de fapt decît o idealizare a comportării lor reale.*

• Un element pasiv de circuit, de exemplu *rezistorul* este un **element liniar** dacă dependenţa curentului de tensiune la borne este liniară,

$$i = \frac{1}{R} u$$

oricare ar fi valoarea şi sensul curentului în element. Rezistenţa electrică R a unui rezistor liniar este o mărime scalară, pozitivă, independentă de curentul ce trece prin rezistor. Altfel spus, o creştere a intensităţii curentului prin rezistor de λ ori are ca efect o creştere de λ ori a tensiunii la borne şi ca urmare raportul între tensiune şi curent are o valoare constantă, egală cu rezistenţa rezistorului. Graficul funcţiei $i = \frac{1}{R} u$, prezentat în figura 5.1, poartă numele de *caracteristica curent-tensiune a rezistorului*. Caracteristica $i - u$ a unui rezistor este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate şi este situată în cadranele *1* şi *3*.

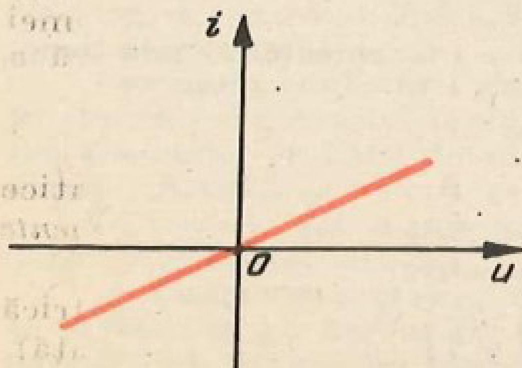


Fig. 5.1

○ **Notă.** Acest mod de a caracteriza rezistorul nu este însă în concordanţă cu experienţa decît pentru intensităţi ale curentului care nu provoacă o încălzire notabilă datorită efectului electrocaloric al curentului. Din acest motiv, pentru orice rezistor, fabricantul trebuie să indice, în afară de valoarea rezistenţei, şi *puterea disipată admisibilă.* Această putere limitează curentul care poate să treacă prin

rezistor fără a provoca modificarea rezistenței sale. De exemplu, pentru un rezistor de 2 k Ω/0,5 W, intensitatea admisibilă în c.c. (valoarea efectivă în c.a.) este:

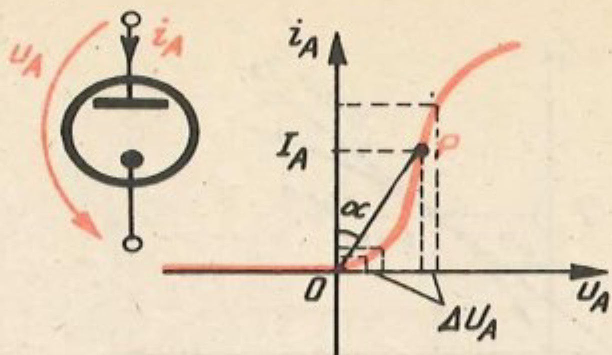


Fig. 5.2

$$I_{ad} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0,5}{2 \times 10^3}} \cong 16 \text{ mA}.$$

• **Element neliniar.** Examinînd caracteristica tensiune-curent a unei *diode cu vid*, prezentată în figura 5.2, constatăm că la creșteri egale Δu_A ale tensiunii anodice nu corespund creșteri egale ale curentului anodic decît în porțiunea liniară a caracteristicii.

Elementele de circuit rezistive care nu prezintă o dependență liniară a curentului de tensiune la borne sînt caracterizate prin doi parametri:

— *rezistența statică* R_{st}, definită ca raport între tensiune și curent într-un punct P de pe caracteristică, numit *punct static de funcționare* (prescurtat, *PSF*):

$$R_{st} = \frac{U_A}{I_A} = k \text{ tg } \alpha \tag{5.1}$$

Rezistența statică este deci proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului α format de dreapta OP cu axa curentului, constanta de proporționalitate k fiind determinată de raportul scărilor grafice utilizate pentru tensiune și respectiv pentru curent. Rezistența statică a diodei cu vid este o mărime pozitivă, dependentă de tensiunea anodică;

— *rezistența dinamică în punctul static* r_d, proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului de înclinare β față de axa curentului, a tangentei geometrice la graficul caracteristicii în punctul static de funcționare (fig. 5.3):

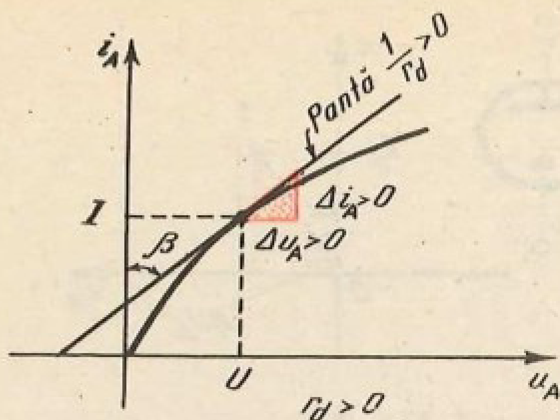
$$r_d = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\bigg|_P = \frac{du_A}{di_A}\bigg|_P = k \text{ tg } \beta \tag{5.2}$$

unde k este raportul scărilor de tensiune și curent folosite pentru graficul caracteristicii statice. Rezistența dinamică este *pozitivă* în porțiunile ascendente ale caracteristicii tensiune-curent, deoarece unei variații pozitive Δu_A a tensiunii la borne îi corespunde o variație a curentului Δi_A, de asemenea pozitivă (fig. 5.3, *a*); în porțiunile descendente ale caracteristicii statice, unei variații pozitive Δu_A a tensiunii îi corespunde o variație Δi_A negativă a curentului prin element și deci raportul $\dfrac{\Delta u_A}{\Delta i_A}$ este *negativ* (fig. 5.3, *b*).

• **Tipuri de elemente neliniare.** După forma caracteristicii statice $i = f(u)$, elementele neliniare se pot clasifica în *elemente simetrice* și *elemente nesimetrice*.

Un element neliniar este *simetric* dacă are caracteristica statică simetrică față de originea axelor de coordonate (de exemplu, becul cu incandescență).

Dioda cu vid este un element neliniar *nesimetric*, capabil să conducă curentul într-un singur sens. Pentru tensiuni anodice negative dioda se pre-



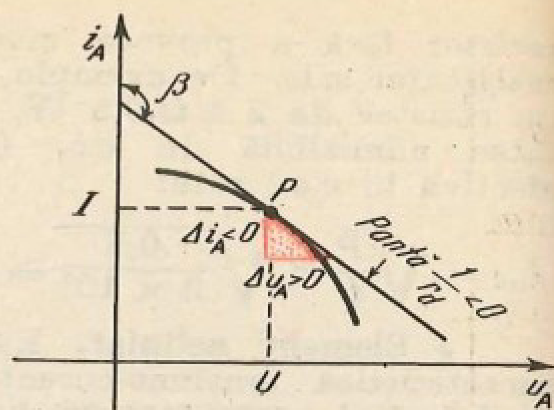


Fig. 5.3

zintă asemenea unui întrerupător deschis, deoarece curentul anodic este nul (v. fig. 5.2). Această particularitate a diodei cu vid este folosită în tehnica redresării curentului alternativ.

Alte elemente neliniare utilizate frecvent în circuitele de c.c. sau c.a. sînt: termistorul, tubul baretor, dioda semiconductoare, dioda tunel, dioda Zener etc., toate — elemente de circuit cu două borne de acces, pentru care vom prezenta pe scurt anumite particularități extrem de utile pentru aplicațiile tehnice.

1. Lampa cu incandescență

• **Lampa cu incandescență,** utilizată în tehnica iluminatului electric, se compune dintr-un filament din material greu fuzibil (wolfram) dispus într-un balon de sticlă în care se face vid sau se introduc gaze inerte. Prezența gazului inert împiedică vaporizarea filamentului favorizată de temperatura mare de lucru (2 500—3 000°C). Lampa cu incandescență are „la cald" o rezistență statică mai mare decît „la rece".

• **Caracteristica statică** $u—i$ a unei *lămpi cu incandescență cu filament din wolfram*, prezentată în figura 5.4, pune în evidență comportarea sa neliniară simetrică.

Caracteristica statică a unei *lămpi cu incandescență cu filament de cărbune* prezentată în figura 5.5 scoate în evidență o dependență a rezistenței statice de curent, inversă față de lampa cu filament metalic.

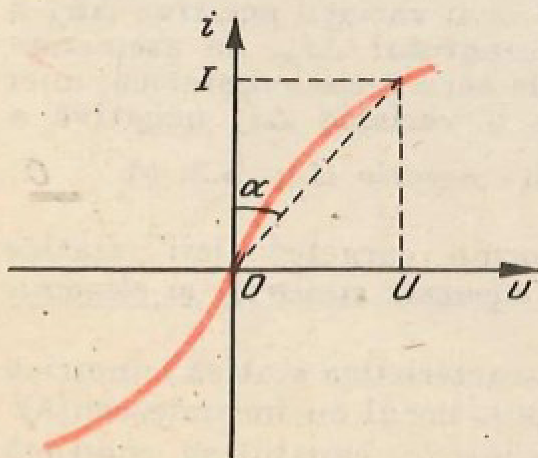


Fig. 5.4

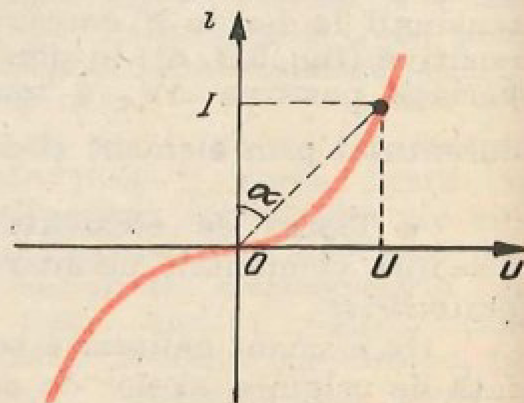


Fig. 5.5

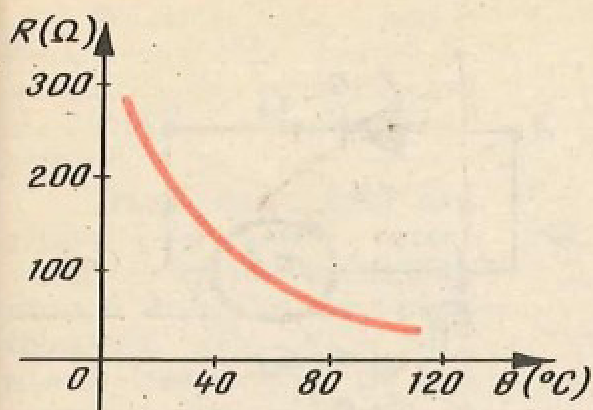


Fig. 5.6

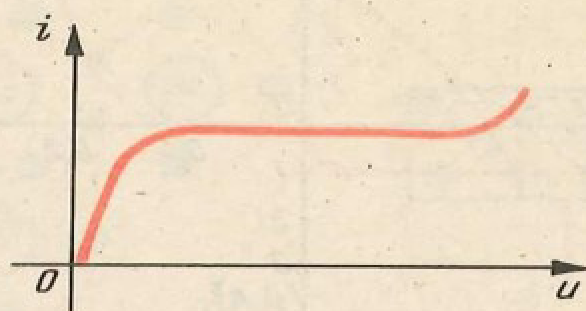


Fig. 5.7

2. Termistorul

• **Termistorul este** un rezistor neliniar **obţinut prin** sinterizarea unor oxizi metalici ca NiO, Mn_2O_3 şi CO_2O_3, care prezintă un coeficient negativ de temperatură al rezistivităţii. Variaţia rezistivităţii cu temperatura este foarte mare şi pronunţat neliniar (fig. 5.6). Termistoarele sînt utilizate în releele termice, în termometrie, în dispozitivele de acţionare etc.

3. Tubul baretor

• **Tubul baretor se compune,** ca şi becul cu incandescenţă, dintr-un filament confecţionat însă din fier dispus într-un balon, în atmosferă de hidrogen.

• Pe **caracteristica statică a baretorului** (fig. 5.7) se remarcă existenţa unei porţiuni în care curentul este independent de tensiunea la borne. Proprietatea aceasta îşi găseşte utilizare în tehnică în instalaţii care funcţionează în c.c. la valori constante ale curentului.

4. Dioda semiconductoare

• **Caracteristica statică.** Dioda semiconductoare sau joncţiunea $p-n$ este un dispozitiv electronic cu două borne de acces. Părţile componente ale diodei semiconductoare şi simbolul grafic sînt prezentate în figurile 5.8, *a*, *b*. În unul dintre sensuri, de la semiconductorul de tip *p* către semiconductorul de tip *n*, pe care-l denumim *sens direct*, dioda conduce bine curentul, prezentînd o rezistenţă electrică mică. În sensul opus, de la semiconductorul de tip *n* la cel de

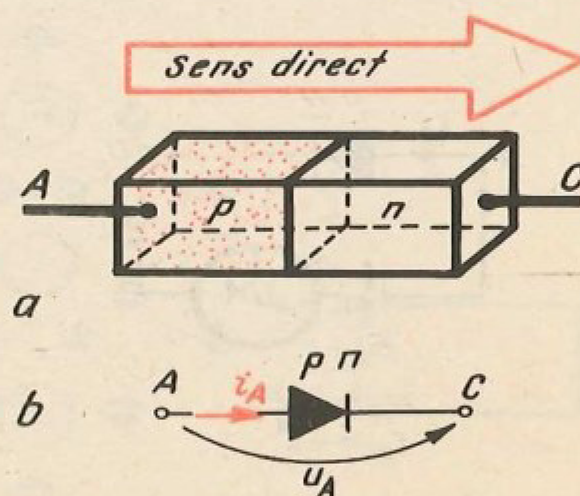


Fig. 5.8

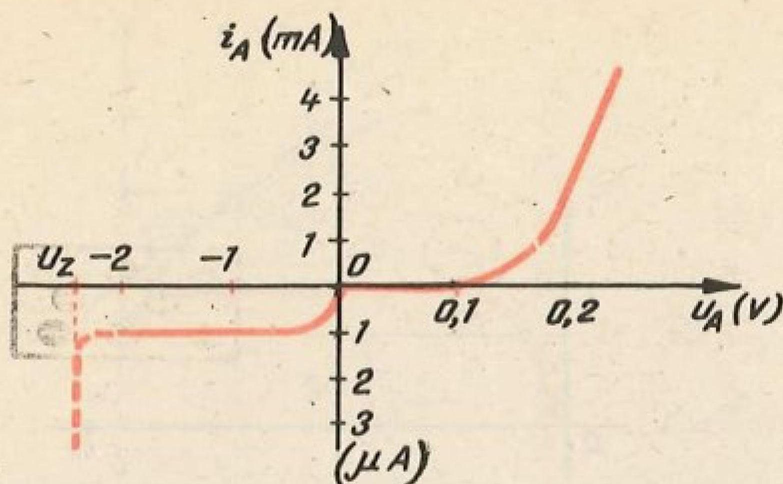


Fig. 5.9

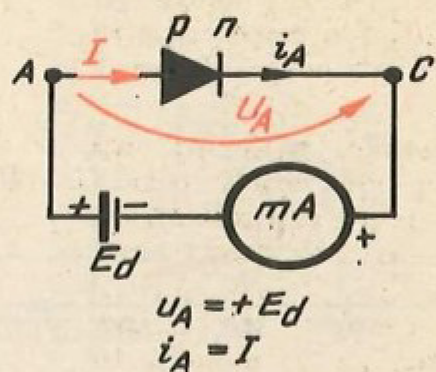


Fig. 5.10

tip *p (sens invers)*, dioda conduce rău curentul, prezentînd în consecință o rezistență electrică mare. Această proprietate a diodei semiconductoare se ilustrează pe caracteristica statică prezentată în figura 5.9, unde s-au folosit scări grafice diferite pentru porțiunile situate în cadranele *1* și *3*. Porțiunea din primul cadran corespunde polarizării joncțiunii în sens direct, așa cum se arată în figura 5.10, unde pentru măsurarea curentului se utilizează un miliampermetru de c.c. Porțiunea din cadranul al treilea corespunde polarizării joncțiunii în sens invers (fig. 5.11). Sensul curentului prin diodă este opus sensului inițial și de valoare mult mai mică. Pentru măsurarea acestui curent este prevăzut în circuit un microampermetru de c.c. (μA).

• **Mecanismul microscopic al funcționării unei diode semiconductoare.** **Semiconductoarele** sînt materiale cristaline care **în stare pură (intrinsecă)** prezintă o *conductivitate electrică foarte mică*. Germaniul și siliciul, care sînt cele mai larg utilizate în tehnică, au la temperatura ambiantă (300 °K) rezistivități mult mai mari decît ale metalelor ($\rho_{Ge} = 0{,}45\ \Omega \cdot m$, $\rho_{Si} = 2{,}30\ \Omega \cdot m$, față de $\rho_{Cu} = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$ și $\rho_{Al} = 2{,}65 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$). Ele sînt elemente tetravalente. Cei patru electroni de valență ai unui atom intră în legături covalente cu atomii vecini. Stratul de valență al fiecărui atom va avea astfel opt electroni și practic nu vor exista electroni liberi, disponibili pentru conducția curentului (fig. 5.12).

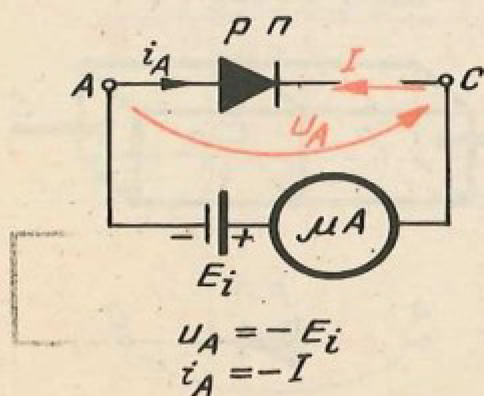


Fig. 5.11

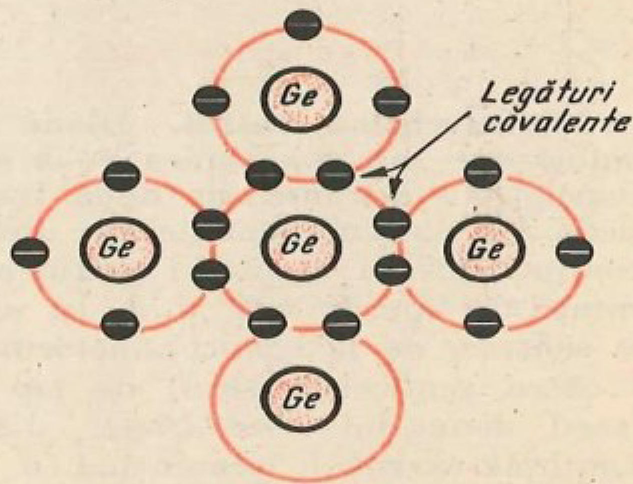


Fig. 5.12

Rezistivitatea semiconductoarelor scade apreciabil prin impurificare cu atomi ai altui element chimic.

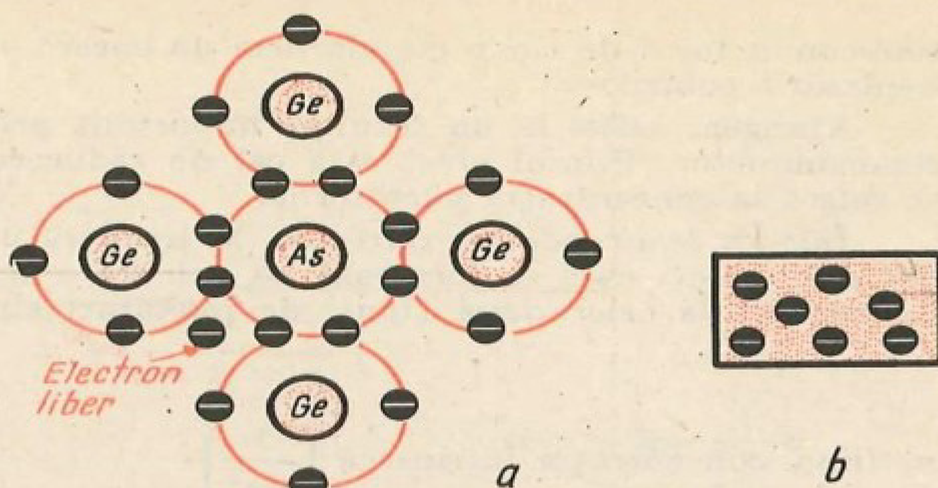


Fig. 5.13

Dacă germaniul sau siliciul (elemente tetravalente) **se impurifică cu atomii unui element pentavalent** (P, As, Sb), atomii respectivi de impuritate se plasează în rețeaua cristalină a materialului pur (fig. 5.13, *a*) în locul unora dintre atomii săi, în anumite poziții fixe. Patru dintre cei cinci electroni de valență ai atomului de impuritate intră în legături covalente cu atomii vecini de germaniu. Al cincilea electron, fiind slab legat de atomul de impuritate, poate deveni liber, fiind astfel disponibil pentru conducția curentului. Energia care trebuie cheltuită pentru a „detașa" acest electron din atom este de 0,01 eV pentru germaniu și 0,05 eV pentru siliciu.

Elementele pentavalente joacă pentru semiconductorul pur rolul de *elemente donoare* de electroni. Ele se numesc donoare, iar semiconductorul aliat cu elemente donoare este un *semiconductor de tip n* (negativ) (fig. 5.13, *b*).

Dacă însă germaniul sau siliciul se impurifică cu atomi ai unor elemente trivalente (B, Ga, In), cei trei electroni de valență ai atomului de impuritate formează legături covalente numai cu trei dintre cei patru atomi vecini din rețeaua cristalină (fig. 5.14, *a*). Absența unui electron, deci a unei sarcini negative, în cea de-a patra legătură covalentă, este indicată în figura 5.14, *a* printr-un „gol" pozitiv. O legătură covalentă incompletă se manifestă deci ca o sarcină pozitivă. Elementele trivalente joacă pentru semiconductorul pur, tetravalent, rolul de *elemente acceptoare* (de electroni), deoarece pentru realizarea legăturii covalente incomplete atomul de impuritate trivalent „acceptă" un electron de valență din legăturile covalente vecine. Dar un electron care părăsește o legătură covalentă pentru a umple golul vecin lasă un „loc vacant" pentru un alt electron de valență, adică un alt gol. Prin urmare, golul se deplasează efectiv prin rețeaua cristalină a semiconductorului impurificat, în sens invers deplasării electronului.

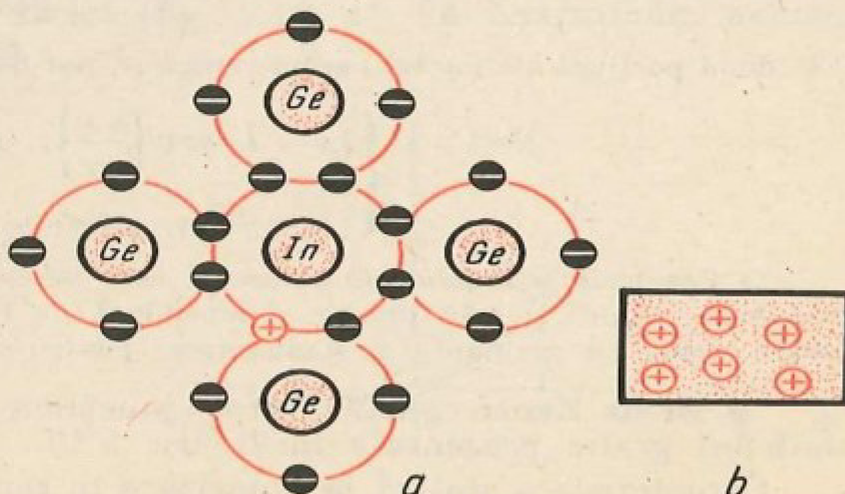


Fig. 5.14

Cînd în semiconductorul impurificat cu elemente acceptoare (indicat schematic în fig. 5.14, *b*), denumit *semiconductor de tip p* (pozitiv) se stabilește un cîmp electric, are loc o deplasare ordonată a golurilor în sensul cîmpului electric. Prin

semiconductorul de tip *p* circulă deci un curent electric de conducţie datorat deplasării golurilor.

Ajungem astfel la un rezultat important privitor la impurificarea unui semiconductor. Primul efect este cel de reducere a rezistivităţii. Al doilea se referă la concentraţia purtătorilor.

Într-un semiconductor intrinsec, la temperatura ambiantă există perechi electroni-goluri care se formează ca urmare a mişcării de agitaţie termică. Concentraţiile celor două tipuri de purtători sînt egale, respectiv

$$\boxed{p = n = n_i}, \tag{5.3}$$

n_i fiind concentraţia intrinsecă $\left(\frac{1}{\text{cm}^3}\right)$.

Într-un semiconductor de tip n electronii sînt purtători majoritari şi au concentraţia mult mai mare decît a golurilor care sînt purtători minoritari. Invers, *într-un semiconductor de tip p* purtătorii majoritari sînt golurile, iar electronii sînt purtători minoritari.

Aplicaţie. *Ecuaţia caracteristicii statice a unei diode semiconductoare cu germaniu este* $i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) - 1\right]$, *unde* $u_T = \frac{kT}{e}$, *k fiind constanta lui Boltzmann şi e — sarcina elementară, iar* I_s, *numit „curent de saturaţie", este curentul prin joncţiunea polarizată în sens invers. Să se determine parametrul* u_T *la temperatura de 20°C şi expresiile aproximative ale ecuaţiei caracteristicii statice pentru polarizări ale diodei în ambele sensuri.*

Parametrul u_T are, la 20°C, valoarea

$$u_T = \frac{T}{e/k} = \frac{T}{11\,600} = \frac{293}{11\,600} = 25 \text{ mV}. \tag{5.4}$$

Dacă diodă este polarizată *în sens direct* cu tensiunea $u_A = 0{,}15$ V, se obţine:

$$i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{0{,}15}{25 \times 10^{-3}}\right) - 1\right] = I_s[\exp(6) - 1] \cong 400 \quad I_s.$$

Pentru o polarizare *în sens invers* cu $u_A = -0{,}15$ V, curentul anodic este:

$$i_A = I_s[\exp(-6) - 1] = I_s\left[\frac{1}{400} - 1\right] \cong -I_s.$$

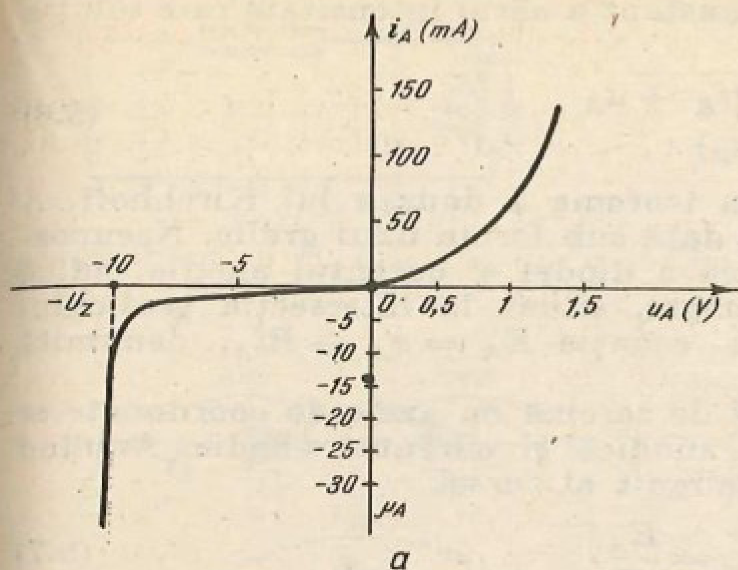
Cele două porţiuni ale curbei caracteristice se pot deci aproxima astfel:

$$\begin{cases} i_A = I_s \exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right); & u_A > 0 \\ i_A = -I_s; & u_A < 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

○ **Concluzie.** *Curentul de saturaţie* este determinat de purtătorii minoritari din cele două regiuni şi este practic independent de tensiunea de polarizare (microamperi pentru dioda cu germaniu şi nanoamperi pentru cea cu siliciu).

• **Dioda Zener** constă dintr-o joncţiune *p-n* cu caracteristica statică şi simbolul grafic prezentate în figura 5.15.

Caracteristica statică la polarizare în sens direct este identică cu a unei diode obişnuite. La polarizarea joncţiunii în sens invers, caracteristica pre-



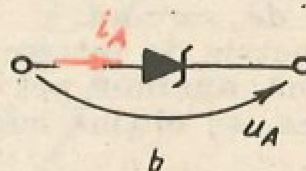


Fig. 5.15

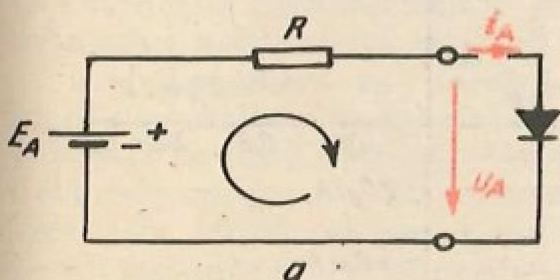
zintă o porțiune abruptă situată la tensiunea $u_A = -U_Z$, unde o variație mică a tensiunii provoacă o variație mare a curentului fără ca dioda să se străpungă. Datorită acestei proprietăți, dioda Zener se utilizează în redresoarele stabilizate de tensiune (surse de c.c. stabilizate).

• **Dioda tunel** este tot o diodă semiconductoare, a cărei caracteristică statică nu este însă în permanență ascendentă, în sensul că pentru anumite valori ale tensiunii curentul descrește cînd tensiunea crește. În acest domeniu al tensiunii de polarizare dioda tunel prezintă o *rezistență dinamică negativă*, proprietate folosită în tehnica generării de oscilații sinusoidale.

B. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU CU ELEMENTE NELINIARE. DETERMINAREA PUNCTULUI STATIC DE FUNCȚIONARE

1. Circuite cu un singur element neliniar

Pentru început vom analiza un circuit simplu, format dintr-o sursă de tensiune, un rezistor liniar și un element neliniar, de exemplu o diodă semiconductoare polarizată în sens direct (fig. 5.16, *a*). **Să determinăm punctul static de funcționare al diodei.**



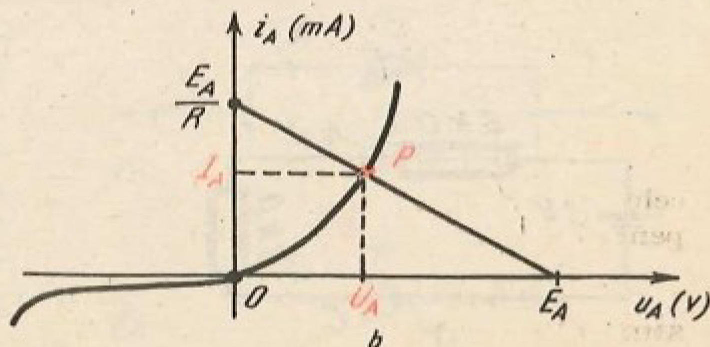


Fig. 5.16

În circuit se stabileşte un curent constant a cărui intensitate este soluţia sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} E_A = Ri_A + u_A \\ i_A = f(u_A). \end{cases} \tag{5.6}$$

Prima ecuaţie a sistemului rezultă din teorema a doua a lui Kirchhoff. A doua ecuaţie este caracteristica statică dată sub forma unui grafic. Necunoscutele sistemului sînt tensiunea anodică a diodei şi curentul anodic, adică *coordonatele punctului static de funcţionare*, situat la intersecţia graficului caracteristicii statice cu dreapta de ecuaţie $E_A = u_A + Ri_A$, denumită *dreaptă de sarcină.*

Punctele de intersecţie ale dreptei de sarcină cu axele de coordonate se determină anulînd pe rînd tensiunea anodică şi curentul anodic. Anulînd tensiunea, se obţine curentul de scurtcircuit al sursei

$$I_{Ao} = I_{sc} = \frac{E_A}{R}. \tag{5.7}$$

Anulînd curentul se obţine tensiunea de mers în gol a sursei

$$U_{Ao} = E_A. \tag{5.8}$$

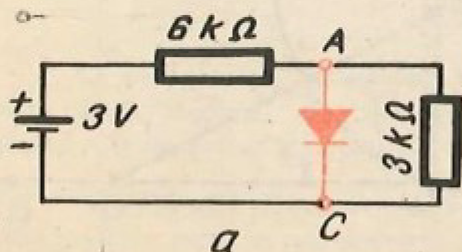
Dreapta de sarcină determinată de tăieturile sale pe axe intersectează graficul caracteristicii statice în punctul P de coordonate U_A şi I_A.

În aplicaţiile practice prezintă interes deosebit circuitele ce conţin un element neliniar conectat la bornele unui circuit liniar şi activ (dipol activ). Pentru determinarea punctului static de funcţionare al elementului neliniar se determină mai întîi generatorul echivalent de tensiune faţă de bornele dipolului, după care se foloseşte procedeul expus anterior.

Aplicaţie. *Să se determine coordonatele punctului static de funcţionare al diodei semiconductoare din circuitul din figura 5.17, a. Caracteristica statică a diodei este indicată în figura 5.17, b.*

Eliminînd dioda se obţine circuitul liniar din figura 5.18, care poate fi înlocuit cu generatorul echivalent faţă de bornele A şi C care are t.e.m. U_{ACO} şi rezistenţa internă R_{ACO}. Tensiunea U_{ACO} se determină cu formula divizorului de tensiune:

$$U_{ACO} = 3\,\frac{3}{3+6} = 1\ \text{V}.$$



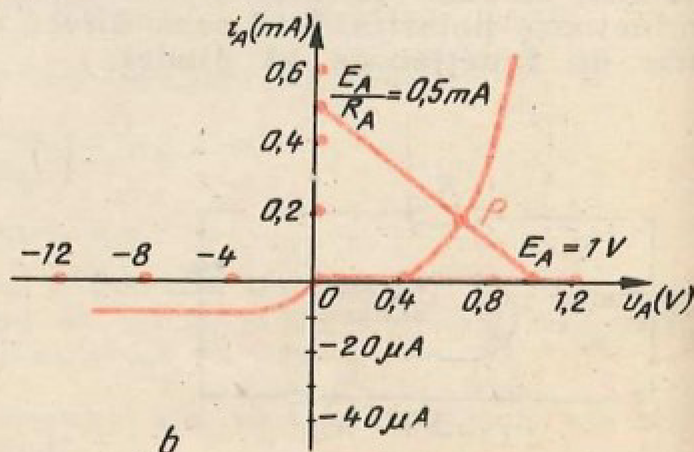
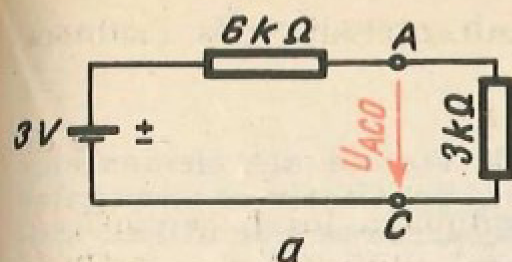


Fig. 5.17



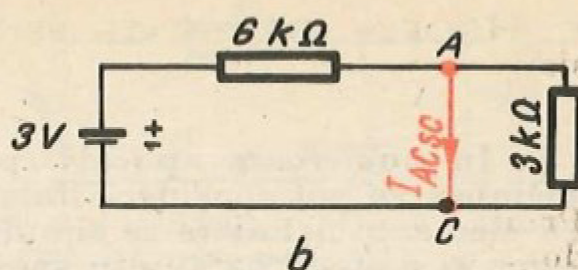
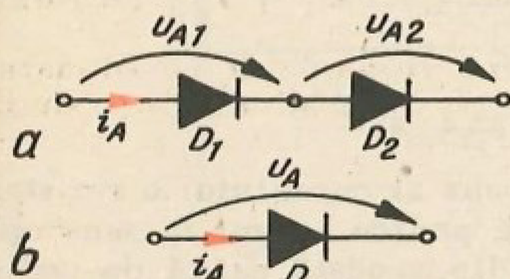


Fig. 5.18



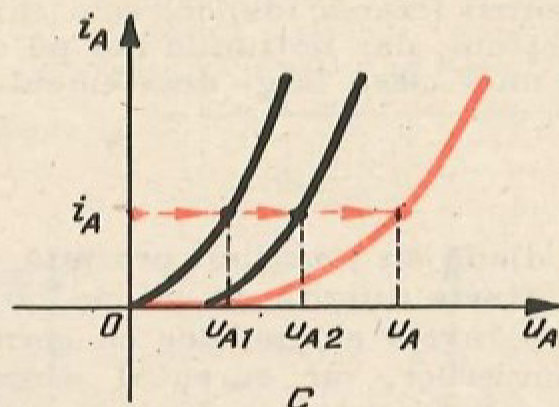


Fig. 5.19

Pentru a determina rezistența R_{ACO}, se calculează mai întîi curentul de scurtcircuit I_{ACsc}:

$$I_{ACsc} = \frac{3\ \text{V}}{6\ \text{k}\Omega} = 0{,}2\ \text{mA},$$

de unde se obține

$$R_{ACO} = \frac{U_{ACO}}{I_{ACsc}} = \frac{1\ \text{V}}{0{,}2\ \text{mA}} = 5\ \text{k}\,\Omega.$$

Circuitul echivalent este cel din figura 5.16, *a*. Intersecția dreptei de sarcină cu caracteristica statică determină punctul static de funcționare P de coordonate $U_A = 0{,}65$ V și $I_A = 0{,}18$ mA.

2. Asocierea elementelor neliniare

• **Asocierea în serie.** Două elemente neliniare asociate în serie (fig. 5.19,*a*) se pot înlocui cu un element neliniar echivalent (fig. 5.19, *b*) a cărui caracteristică statică se obține *sumînd pe orizontală caracteristicile statice ale celor două elemente* (fig. 5.19, *c*). Procedeul se justifică observînd că la același curent i_A tensiunea la borne este suma tensiunilor la bornele elementelor:

$$u_A = u_{A1} + u_{A2} \tag{5.9}$$

Construcția caracteristicii statice a elementului echivalent se face prin puncte.

• **Asocierea în paralel.** Cazul elementelor neliniare asociate în paralel se tratează în mod similar. De data aceasta, deoarece curentul prin elementul echivalent (fig. 5.20, *b*) este suma curenților prin elementele componente — fig. 5.20, *a* (la aceeași tensiune la borne), caracteristicile statice se adună pe verticală.

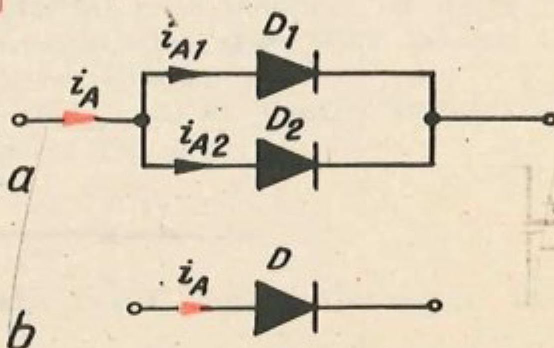


Fig. 5.20

C. MODELE IDEALIZATE PENTRU DIODE CU CARACTERISTICĂ LINIARĂ PE PORŢIUNI

În numeroase aplicaţii practice caracteristicile statice ale elementelor neliniare se pot considera liniare pe porţiuni. Studiul cantitativ al circuitelor cu elemente neliniare se simplifică în acest mod, deoarece se pot utiliza teoreme şi metode de studiu specifice circuitelor liniare.

Pentru fixarea ideilor, vom considera cazul unei diode semiconductoare cu joncţiuni, dar noţiunile noi pe care le introducem şi metoda de lucru se aplică unei clase largi de elemente neliniare.

1. Dioda ideală

O diodă cu joncţiuni prezintă pentru un sens al curentului o rezistenţă statică foarte diferită de cea pe care o prezintă pentru curent în sens opus. Curentul invers al diodelor cu germaniu este din această cauză de ordinul microamperilor, iar curentul direct — de ordinul miliamperilor. În plus, tensiunea la bornele unei diode în conducţie directă este de numai 0,1 V ...0,7 V, faţă de tensiunile inverse, care pot atinge sute de volţi. Dacă dioda este utilizată într-un circuit în care curenţii sînt mari în comparaţie cu curentul invers, iar tensiunile sînt mari în comparaţie cu tensiunea de polarizare directă, dioda poate fi modelată prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} u_A = 0, \text{ pentru } i_A > 0; \\ i_A = 0, \text{ pentru } u_A < 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

În acest model simplificat se neglijează căderea de tensiune în conducţie directă şi curentul în conducţie inversă. Modelul diodei definit de relaţiile de mai sus corespunde **diodei ideale** şi reprezintă un exemplu de liniarizare pe porţiuni a caracteristicii statice.

Simbolul grafic şi caracteristica statică a unei diode ideale sînt prezentate în figura 5.21. Joncţiunea *p-n* se poate reprezenta prin contactele unui întrerupător care trebuie considerat închis cînd dioda conduce şi deschis cînd dioda este blocată. Altfel spus, rezistenţa diodei ideale este nulă cînd dioda conduce şi infinită cînd dioda este blocată.

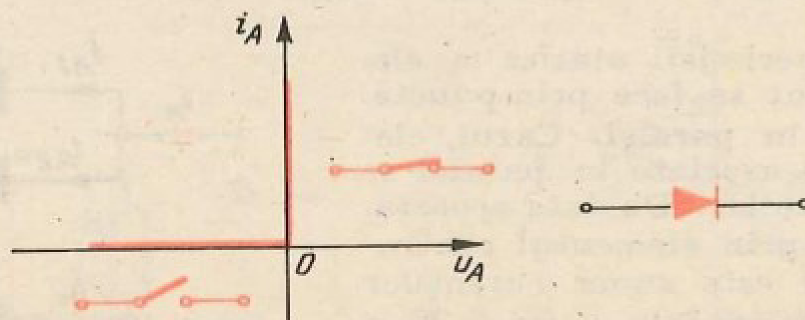


Fig. 5.21

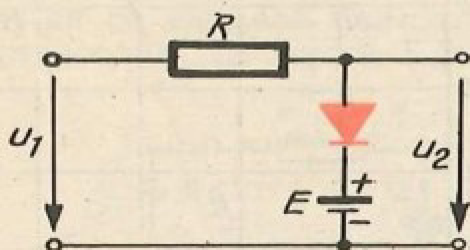


Fig. 5.22

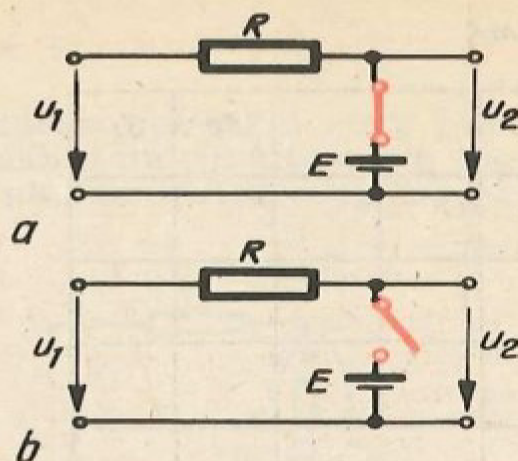


Fig. 5.23

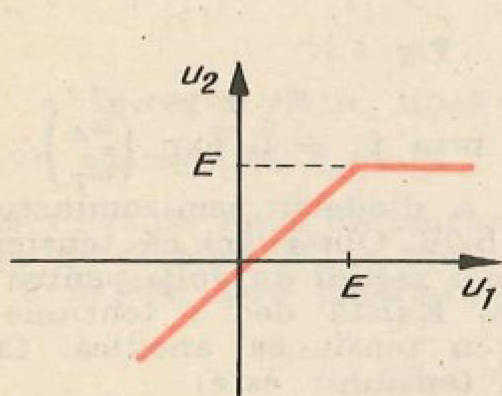


Fig. 5.24

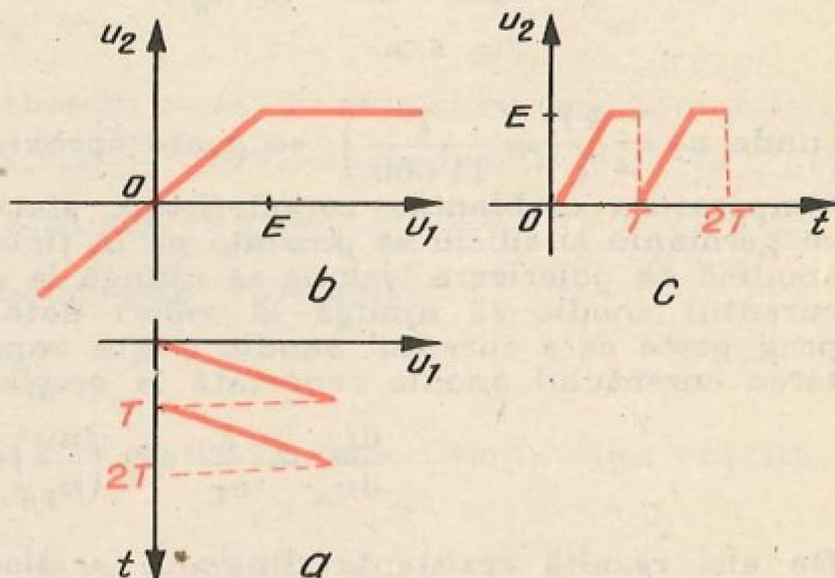


Fig. 5.25

Aplicația 1. *Să se determine dependența tensiunii de ieșire u_2 de tensiunea de intrare u_1 pentru diportul din figura 5.22, dacă dioda semiconductoare este ideală.*

Starea diodei este determinată de tensiunea de intrare u_1. *Dacă* $u_1 > E$ dioda este polarizată în sens direct și se comportă ca un întrerupător închis (fig. 5.23, *a*). Tensiunea u_2 rezultă egală cu tensiunea E la bornele sursei. *Dacă* $u_1 < E$, dioda este blocată și se comportă ca un întrerupător deschis (fig. 5.23, *b*). Tensiunea u_2 este egală cu u_1. Dependența căutată este prezentată în figura 5.24.

○ **Notă.** Circuitul din figura 5.22 este un limitator de tensiune cu diodă.

Aplicația 2. *Tensiunea de intrare u_1 din circuitul din figura 5.22 variază în timp ca în figura 5.25. Să se deseneze forma de undă a tensiunii u_2.*

Tensiunea u_2 nu poate depăși valoarea E (fig. 5.25, *b*). Pentru valori mai mici, tensiunea u_2 crește liniar în timp ca și tensiunea u_1 (fig. 5.25, *c*).

2. Modelul diodei cu sursă ideală de tensiune

Deoarece curentul de saturație I_s este mult mai mic decît curentul în conducție directă, ecuația caracteristicii statice $i_A = I_s\left[\exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) - 1\right]$

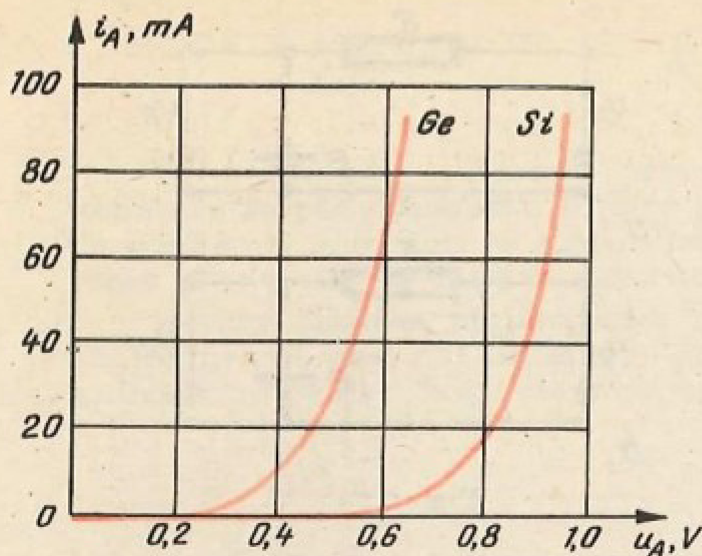


Fig. 5.26

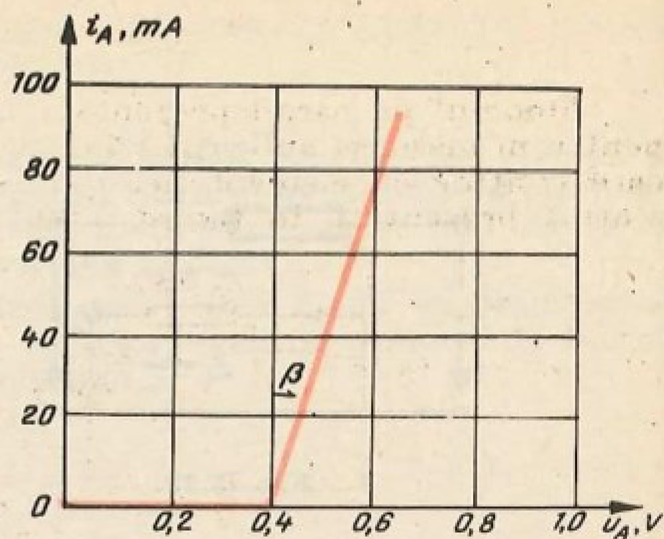


Fig. 5.27

$\left(\text{unde } u_T = \dfrac{kT}{e} = \dfrac{T}{11\,600}\right)$ se poate aproxima prin $i_A = I_s \exp\left(\dfrac{u_A}{u_T}\right)$. La temperatura ambiantă, caracteristica statică a diodelor semiconductoare cu germaniu şi siliciu se prezintă ca în figura 5.26. Observăm că tensiunea anodică de polarizare trebuie să ajungă la cîteva zecimi de volţi pentru ca curentul anodic să ajungă la valori notabile. Există deci o tensiune de prag peste care curentul anodic creşte rapid cu tensiunea anodică. Creşterea curentului anodic raportată la creşterea tensiunii este:

$$\frac{di_A}{du_A} = \frac{I_s}{u_T} \exp\left(\frac{u_A}{u_T}\right) = \frac{1}{u_T}\, i_A.$$

De aici rezultă rezistenţa dinamică a diodei, $r_d = \dfrac{du_A}{di_A} = \dfrac{u_T}{i_A}$, o mărime pozitivă dependentă de curentul anodic. Pentru un punct static de funcţionare (PSF) în care curentul este de 50 mA, rezistenţa dinamică este $r_d = \dfrac{25 \text{ mV}}{50 \text{ mA}} = 0{,}5\ \Omega$.

Caracteristica statică a diodei cu germaniu prezentată în figura 5.26 poate fi liniarizată pe porţiuni ca în figura 5.27, respectiv:

$$\begin{cases} i_A = 0 \text{ pentru } u_A < 0{,}4 \text{ V}; \\ i_A = \dfrac{1}{r_d}(u_A - 0{,}4) \text{ pentru } u_A > 0{,}4 \text{ V}. \end{cases} \qquad (5.11)$$

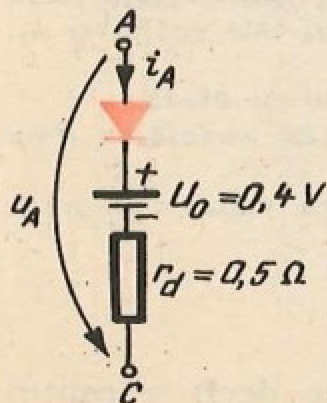


Fig. 5.28

Pentru tensiuni anodice inferioare tensiunii de prag, dioda se prezintă ca un întrerupător deschis; *la tensiuni anodice peste valoarea de prag, dioda se modelează printr-o diodă ideală în serie cu o sursă de tensiune* de *0,4 V şi cu o rezistenţă egală cu rezistenţa dinamică* determinată anterior (fig. 5.28).

3. Modelul diodei pentru semnal mic

Modelul pe care-l prezentăm în continuare prezintă o mare importanță pentru numeroase aplicații tehnice. Vom analiza un circuit simplu (fig. 5.29), care conține ca element neliniar o diodă semiconductoare cu caracteristica statică prezentată în figura 5.30.

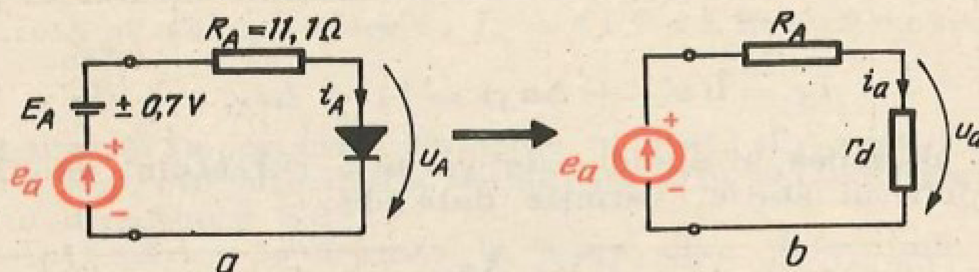


Fig. 5.29

• **În regim static**, adică în absența sursei de semnal cu tensiunea alternativă sinusoidală $e_a = 14,1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t$(mV), dioda funcționează în PSF determinat de sursa de tensiune continuă cu t.e.m. $E_A = 0,7$ V și de rezistența de sarcină $R_A = 11,1$ Ω.

Ecuațiile care determină *coordonatele PSF* sînt:

$$\begin{cases} E_A = Ri_A + u_A \\ i_A = f(u_A) \end{cases}$$

La intersecția dreptei de sarcină cu graficul caracteristicii statice obținem $U_A = 0,43$ V și $I_A = 24$ mA.

Rezistența statică în PSF a diodei este:

$$R_{st} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{0,43\ \text{V}}{24\ \text{mA}} \cong 18\ \Omega.$$

• **În regim dinamic, la semnale mici** (amplitudinea semnalului alternativ este mult mai mică decît tensiunea anodică în *PSF*), teorema a doua a lui Kirchhoff ne conduce la ecuația:

$$E_A + e_a = Ri_A + u_A. \quad (5.12)$$

Tensiunea anodică poate fi scrisă sub forma:

$$u_A = U_A + \Delta u_A \quad (5.13)$$

Δu_A fiind componenta dependentă de timp a tensiunii sau variația ei. Pentru

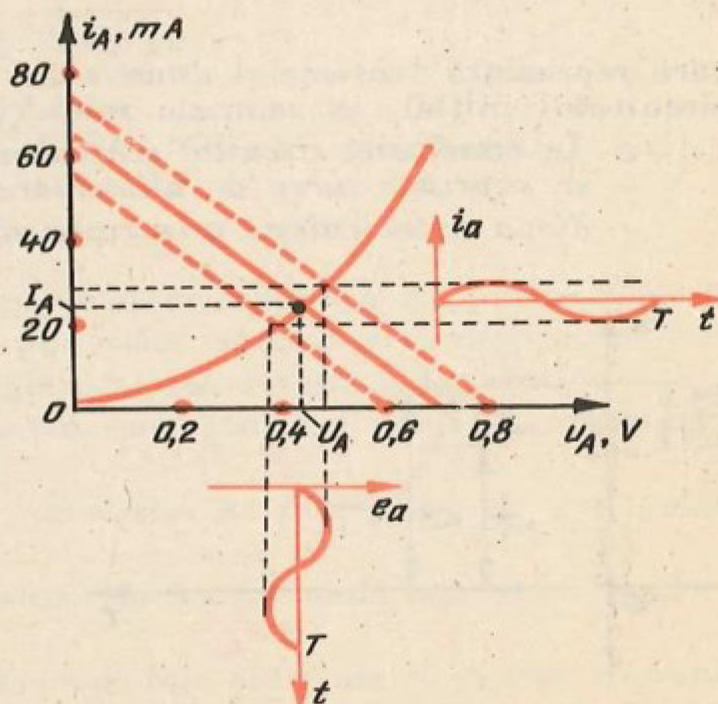


Fig. 5.30

amplitudini mici ale semnalului, variaţia Δu_A este o funcţie de timp alternativă sinusoidală:

$$\Delta u_A = U_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Curentul anodic la o valoare oarecare a tensiunii anodice se poate scrie sub forma:

$$i_A = f(U_A + \Delta u_A) = I_A + \Delta i_A, \tag{5.14}$$

unde termenul al doilea al sumei este variaţia curentului anodic faţă de valoarea din punctul static, variaţie dată de:

$$\Delta i_A = \frac{\Delta u_A}{r_d}.$$

Introducînd aceste mărimi în ecuaţia $E_A + e_a = Ri_A + u_A$ se obţine:

$$E_A + e_a = RI_A + R\Delta i_A + U_A + \Delta u_A.$$

Deoarece $\Delta u_A = r_d \Delta i_A$ şi $E_A = RI_A + U_A$, după reducerea termenilor obţinem o *relaţie între variaţiile tensiunii şi curentului:*

$$e_a = R\Delta i_A + r_d \Delta i_A$$

sau, notînd $\Delta i_A = i_a$ şi $\Delta u_A = u_a$

$$\boxed{e_a = Ri_a + r_d i_a} \tag{5.15}$$

care reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul echivalent circuitului iniţial, la semnale mici (fig. 5.29, *b*).

○ **În concluzie,** *circuitul echivalent la semnale mici se obţine astfel:*

— *se suprimă sursa de alimentare în c.c.;*

— *dioda se înlocuieşte prin rezistenţa dinamică calculată în punctul static.*

Rezistenţa dinamică în punctul static se determină grafic cu relaţia de definiţie, respectiv:

$$r_d = \left.\frac{du_A}{di_A}\right|_{PSF} \cong \left.\frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\right|_{PSF} = \frac{(0{,}48 - 0{,}43)\ \text{V}}{(0{,}28 - 0{,}24)\ \text{mA}} = \frac{5}{4}\ \text{k}\,\Omega = 1{,}25\ \text{k}\,\Omega.$$

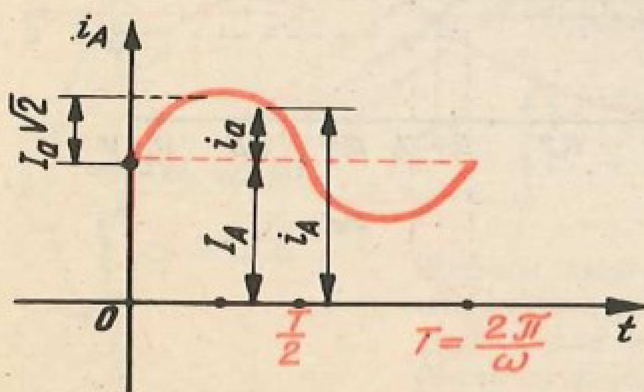


Fig. 3.31

Componenta alternativă a curentului anodic este deci:

$$i_a = \frac{e_a}{R_A + r_d} = \frac{14{,}1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t}{11{,}1 + 1\,250} = 11{,}1\sqrt{2}\sin\frac{2\pi t}{T}\,\mu\text{A},$$

adică un curent cu valoare efectivă $I_a = 11{,}1\ \mu$A în fază cu semnalul aplicat.

○ **Remarcă importantă!** Notaţiile utilizate sînt *notaţii standardizate* şi ca atare sînt obligatorii. Le reamintim deci pentru fixare, urmărind şi graficul din figura 5.31:

I_A, U_A sînt mărimi constante în timp care determină *PSF;*

i_a, u_a sînt variaţiile curentului şi tensiunii la bornele elementului neliniar faţă de valorile din *PSF;*

I_a, U_a sînt valorile efective ale acestor variaţii

$$i_a = I_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;$$

$$u_a = U_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t\ ;$$

i_A, u_A sînt valorile „totale“, respectiv suma între mărimile de c.c. din *PSF* şi variaţiile lor în regim dinamic

$$i_A = I_A + \Delta i_A = I_A + i_a$$

E_A este t.e.m. a sursei de c.c. pentru fixarea *PSF;*

e_a este t.e.m. a sursei de semnal, de valoare efectivă E_a, respectiv

$$e_a = E_a\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}t = E_a\sqrt{2}\sin\omega t.$$

D. UTILIZĂRI SPECIFICE ALE ELEMENTELOR NELINIARE

1. Redresarea tensiunilor alternative sinusoidale

Circuitele electronice, cu unele excepţii doar, necesită cel puţin o sursă de alimentare de c.c. pentru fixarea punctelor statice de funcţionare ale dispozitivelor neliniare în anumite porţiuni ale caracteristicilor statice.

O **sursă de alimentare de c.c.** conţine următoarele părţi componente, denumite şi **blocuri**:

— *partea de redresare a tensiunii alternative de la reţeaua de c.a. (bloc redresor);*

— *filtrul de netezire, destinat ameliorării formei de undă a tensiunii redresate;*

— *partea care realizează stabilizarea tensiunii redresate şi filtrate (blocul stabilizator)*, furnizînd la bornele de ieşire tensiunea continuă independentă de curentul de sarcină.

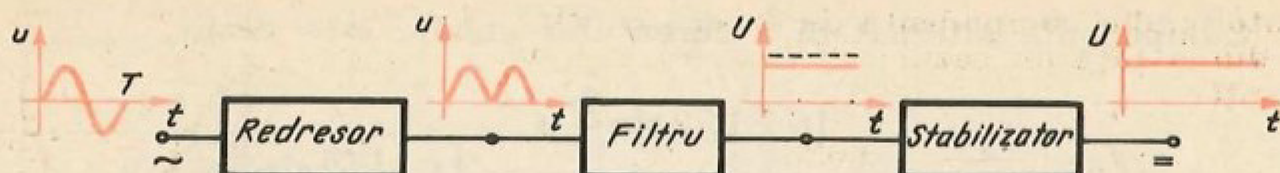


Fig. 5.32

În figura 5.32 sînt prezentate schematic părţile componente ale unei surse stabilizate şi formele de undă corespunzătoare ale tensiunii.

În cele ce urmează ne vom fixa atenţia asupra circuitelor de redresare şi stabilizare a tensiunii, în componenţa cărora intră elemente neliniare.

a. *Blocul redresor*

• **Cea mai simplă instalaţie de redresare** este cea reprezentată în figura 5.33, **compusă din** generatorul de c.a., diodă semiconductoare şi rezistenţa de sarcină.

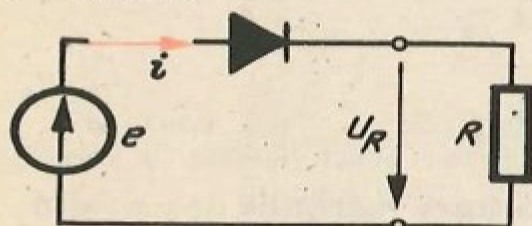


Fig. 5.33

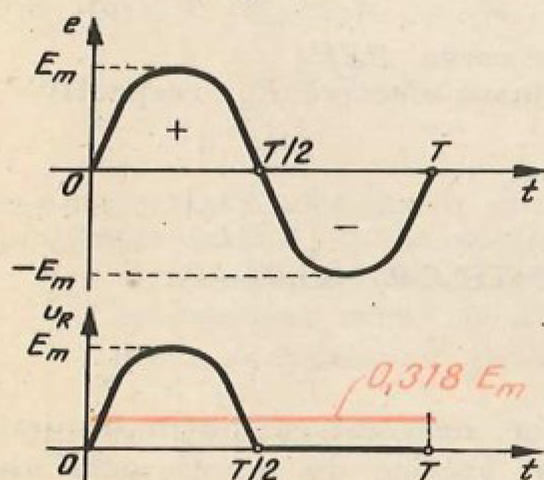


Fig. 5.34

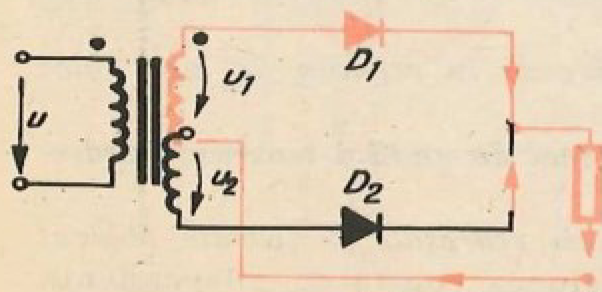


Fig. 5.35

Funcţionare. *În prima semiperioadă* a tensiunii electromotoare alternative sinusoidale, $e = E_m \sin \omega t$, dioda este polarizată în sens direct, iar curentul în circuit este:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t.$$

Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină, $u_R = e - u_A$, este $u_R = e$ dacă dioda semiconductoare este ideală (fig. 5.34).

În semiperioada următoare, t.e.m. este negativă, iar dioda este blocată. Curentul în circuit şi tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină sînt egale cu zero. În figura 5.34 se indică formele de undă ale t.e.m. şi tensiunii u_R numai pe durata unei perioade T, deoarece fenomenul este periodic.

Valoarea medie a tensiunii redresate (care este pulsatorie) sau „componenta de c.c." este

$$\tilde{u}_R = U_0 = \frac{E_m}{\pi} = 0{,}318\, E_m.$$

• Utilizarea unui transformator cu priză mediană şi a două diode semiconductoare permite **redresarea ambelor alternanţe** ale tensiunii alternative (fig. 5.35). Cele două tensiuni la bornele înfăşurării secundare sînt în opoziţie de fază (fig. 5.36), aşa încît cele două diode conduc pe rînd, pe durata cîte unei semiperioade. Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină rezultă tot

pulsatorie, dar componenta de curent continuu este dublă față de cazul redresorului monoalternanță:

$$\mathcal{U}_R = \frac{2U_m}{\pi} = 0,636\ U_m.$$

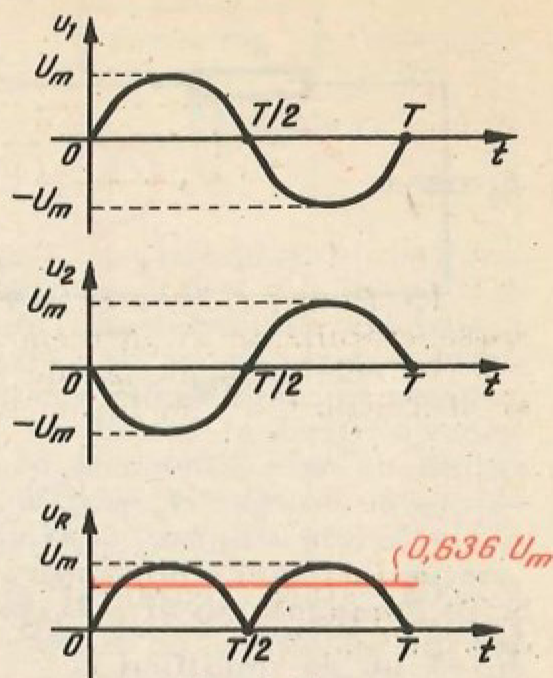


Fig. 5.36

b. *Blocul stabilizator*

• **Circuitul de stabilizare** a tensiunii la bornele rezistenței de sarcină indicat în figura 5.37, *a* cuprinde sursa ideală de tensiune continuă cu t.e.m. $E_A = 20$ V, în serie cu o diodă Zener polarizată în sens invers și cu o rezistență $R = 0,4$ kΩ pentru fixarea punctului static pe caracteristica diodei.

Caracteristica statică a diodei Zener prezintă în conducție inversă o porțiune în care tensiunea de polarizare este $u_A = -U_z = -12$ V independentă de curent pentru un curent mai mic ca -2 mA.

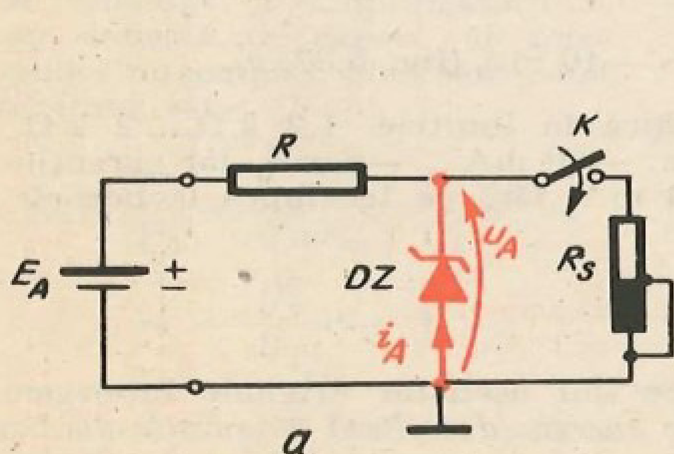
• Pentru a urmări **funcționarea circuitului** presupunem, pentru început, întreruptorul deschis, deci *regim static*. Punctul static de funcționare este plasat la intersecția dreptei de sarcină de ecuație:

$$E_A = -Ri_A - u_A$$

cu caracteristica statică a diodei,

$$i_A = f(u_A).$$

Dreapta de sarcină intersectează axa tensiunii la tensiunea $u_{Ao} = -20$ V. Deoarece intersecția cu axa curentului iese din cadrul figurii $\left(i_{Ao} = \frac{-20}{0,4} = -50 \text{ mA}\right)$, al doilea punct al dreptei de sarcină se determină dînd curentului o valoare convenabilă. Dacă, de exemplu, $i_A = -10$ mA, obținem $u_A = -20 + 0,4 \times 10 = -16$ V.



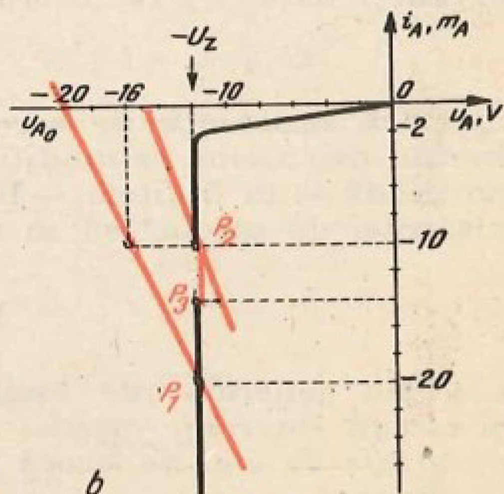


Fig. 5.37

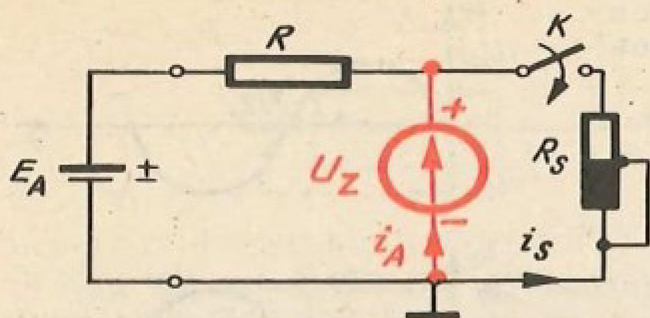


Fig. 5.38

Coordonatele punctului static de funcţionare P_1 rezultă din grafic:

$U_{A1} = -U_z = -12\,\text{V}$; $I_{A1} = -20\,\text{mA}$.

Rezistenţa de sarcină R_s, care se conectează în circuit *la închiderea întrerupătorului*, este un reostat utilizat ca rezistenţă ajustabilă în limitele 0...2 kΩ. Dacă presupunem $R_s = 1{,}2\,\text{k}\,\Omega$, la tensiunea de −12 V curentul de sarcină, cu sensul de referinţă din figura 5.38 este:

$$I_s = \frac{U_{A1}}{R_s} = \frac{-U_z}{R_s} = \frac{-12\ \text{V}}{1{,}2\,\text{k}\,\Omega} = -10\ \text{mA}.$$

Ca atare, curentul prin dioda Zener creşte de la $I_{A1} = -20$ mA la $I_{A2} = -10$ mA, astfel încît curentul prin sursă şi prin rezistenţa de sarcină R_s să nu se modifice.

În regiunea considerată a caracteristicii, pentru curent invers $i_A' \leqslant \leqslant -2\,\text{mA}$ dioda Zener se comportă ca o sursă ideală de tensiune cu t.e.m. $U_z = -12$ V cu polaritatea indicată în figura 5.38. Generatorul echivalent faţă de terminalele diodei are tensiunea electromotoare

$$E_A' = E_A \frac{R_s}{R_s + R} = 20 \frac{1{,}2}{1{,}2 + 0{,}4} = 15\ \text{V}$$

şi rezistenţa internă

$$R' = \frac{R_s R}{R_s + R} = \frac{1{,}2 \times 0{,}4}{1{,}2 + 0{,}4} = 0{,}3\ \text{k}\,\Omega.$$

Noua dreaptă de sarcină are deci ecuaţia:

$$E_A' = -u_A - R' i_A,$$

care intersectează caracteristica statică a diodei, $i_A = \text{f}(u_A)$ în punctul static de funcţionare P_2 de coordonate:

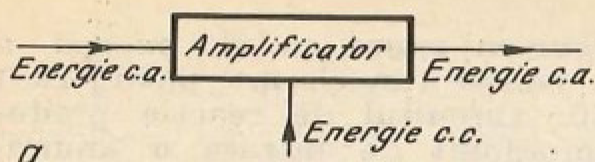
$$U_{A2} = -U_z = -12\ \text{V};\ I_{A2} = -10\ \text{mA (fig. 5.37, } b\text{)}.$$

Dacă rezistenţa de sarcină se modifică în limitele 1,2 kΩ ... 2 kΩ, curentul de sarcină se modifică în limitele: −10 mA ... −6 mA, iar curentul prin diodă — în limitele −10 mA ... −14 mA, fără ca tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină să se modifice.

2. Generarea oscilaţiilor armonice

Prin **generator de oscilaţii armonice** sau **oscilator armonic** înţelegem *un circuit electronic capabil să transforme energia dezvoltată de sursele de c.c. în energie de c.a. de înaltă frecvenţă.*

Pentru a fixa mai bine ideile, vom face o **paralelă între un amplificator şi un oscilator,** referindu-ne la reprezentările simplificate din figura 5.39, în care prin săgeţi s-a indicat sensul transferului de energie.



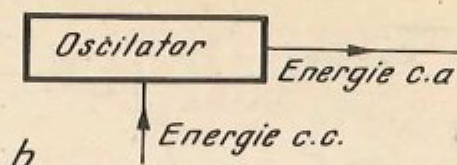


Fig. 5.39

• **Un amplificator** (fig. 5.39, *a*) este un circuit cu două perechi de borne de acces la exterior: bornele de intrare şi bornele de ieşire. La bornele de intrare se conectează o sursă de tensiune (curent) cu tensiunea electromotoare alternativă sinusoidală, de o frecvenţă dată, cu amplitudinea foarte mică (de ordinul milivolţilor). La bornele de ieşire se conectează un receptor de energie, să zicem un difuzor electromagnetic. Tensiunea la bornele receptorului este tot alternativă sinusoidală, cu aceeaşi frecvenţă, dar cu amplitudinea mult mai mare decît cea a tensiunii de intrare. Se spune că amplificatorul **realizează o amplificare în tensiune. De fapt, amplificatorul realizează nu numai o amplificare în tensiune (sau curent), ci şi una în putere,** în sensul că puterea transmisă receptorului în c.a. este mult mai mare decît puterea primită de amplificator de la sursa de semnal conectată la intrare. Această amplificare în putere se realizează pe seama energiei furnizată de sursele de c.c., care au şi rolul de fixare a punctelor statice de funcţionare ale componentelor electronice în regiunile liniare ale caracteristicilor statice.

• Spre deosebire de amplificator, **oscilatorul** (fig. 5.39, *b*) nu primeşte de la exterior energie de c.a. Energia furnizată la bornele de ieşire este energie de c.a., în general de frecvenţă mare în raport cu frecvenţa reţelei (50 Hz). Energia aceasta este primită de oscilator de la sursele de c.c. care, ca şi în cazul amplificatorului, servesc şi pentru fixarea punctelor statice de funcţionare ale dispozitivelor electronice ce intră în componenţa oscilatorului, în regiuni bine determinate ale caracteristicilor tensiune-curent.

• **Principiul reacţiei pozitive.** Principiile de funcţionare ale oscilatoarelor ca sisteme electronice autonome de generare a oscilaţiilor armonice sînt foarte numeroase. Ne vom limita la a prezenta unul dintre ele mai uşor de înţeles şi deseori utilizat în practică. Oscilatorul care funcţionează după acest principiu, denumit al reacţiei pozitive, este reprezentat simplificat în figura 5.40.

Amplificatorul de tensiune are semnalul de intrare u_1 şi semnalul de ieşire u_2 defazat cu π radiani în urmă (amplificator inversor). Amplificarea în tensiune a amplificatorului, $\underline{A}_u$, definită ca raport al imaginilor în complex ale celor două tensiuni este:

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{U_2 e^{j\pi}}{U_1 e^{j0}} = \frac{U_2}{U_1} e^{j\pi} = -\frac{U_2}{U_1} = -A_u,$$

adică un număr real şi negativ.

Tensiunea la ieşire este condiţionată de prezenţa unei tensiuni la intrare.

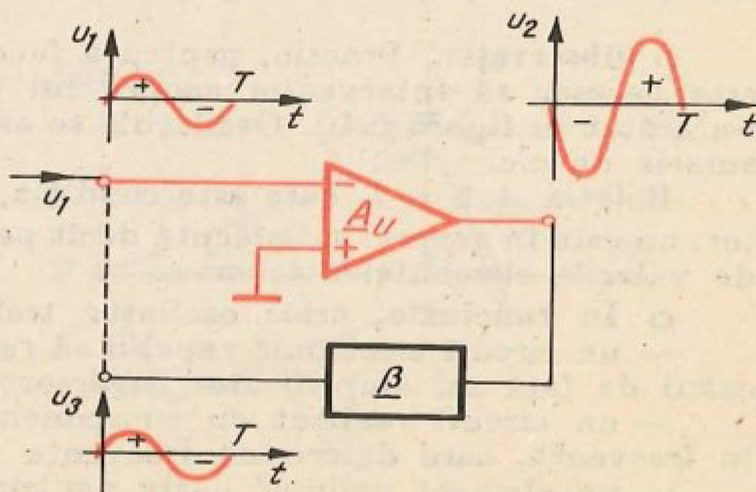


Fig. 5.40

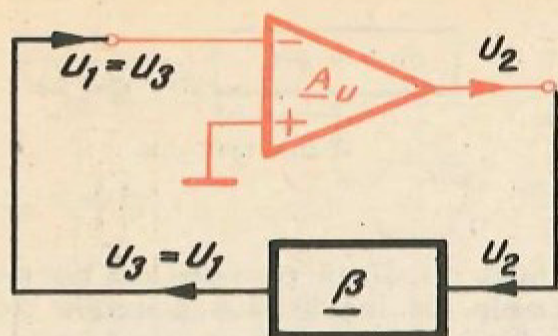


Fig. 5.41

Presupunem acum că se adaugă un circuit de reacție (un circuit pasiv) ca în figura 5.40. Circuitul de reacție produce asupra semnalului de intrare o anumită atenuare și îl defazează în urmă cu π radiani, astfel încît la ieșirea circuitului de reacție rezultă semnalul u_3 în fază cu cel de la intrarea amplificatorului (riguros vorbind, oscilațiile u_3 și u_1 sînt în fază deoarece defazajul total este de 2π rad).

Semnalul u_3 la ieșirea circuitului de reacție poate fi făcut identic cu semnalul la intrarea amplificatorului, caz în care semnalul u_1 poate fi suprimat și conecta împreună bornele de ieșire ale circuitului de reacție cu cele de intrare ale amplificatorului (fig. 5.41). Sistemul va continua să genereze un semnal de ieșire, alternativ sinusoidal. Amplificatorul continuă să aibă un semnal de intrare, dar acest semnal provine chiar din semnalul de la ieșire, transmis prin circuitul de reacție. Aceasta este reacția pozitivă.

Condiția de oscilație. Amplificarea totală a circuitului din figura 5.40, definită ca raport între $\underline{U}_3$ și $\underline{U}_1$ $\left(\underline{A}_u = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1}\right)$ este egală cu unitatea, deoarece și pe calea de reacție se realizează o modificare a fazei cu π radiani.

Amplificarea aceasta este amplificarea căii formate din amplificator și circuitul de reacție. Dacă notăm cu $\underline{\beta}$ *funcția de transfer* a circuitului de reacție definită prin:

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}\,,$$

se observă că amplificarea căii este produsul $\underline{A}_u\,\underline{\beta}$ și este egală cu unitatea

$$\underline{\beta}\underline{A}_u = 1/\underline{0}.$$

Deoarece circuitul de reacție, realizat cu componente pasive (R, C), produce asupra semnalului o atenuare β, *oscilatorul armonic funcționează numai dacă amplificarea amplificatorului este cel puțin egală cu* $\frac{1}{\beta}$.

○ **Observație.** Practic, pentru a face oscilatorul să producă oscilații nu este necesar să intervenim asupra lui cu un semnal de „start", așa cum s-a arătat în figura 5.40. Oscilațiile se amorsează de îndată ce se conectează sursele de c.c.

Relația $\underline{A}_u\underline{\beta} = 1$, care este condiția de amorsare a oscilațiilor în oscilator, nu este în general satisfăcută decît pentru o anumită frecvență f_0, impusă de valorile elementelor schemei.

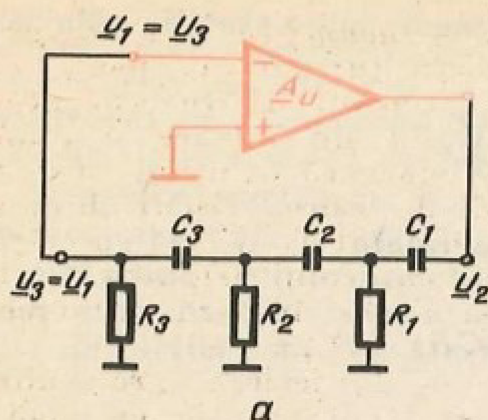
○ **În concluzie,** orice oscilator trebuie să conțină:

— un circuit electronic capabil să realizeze o amplificare în tensiune, în cazul de față un amplificator inversor;

— un circuit realizat cu componente pasive, cu comportare selectivă în frecvență, care determină frecvența de oscilație;

— un element neliniar pasiv pentru limitarea amplitudinii oscilațiilor;

— surse de alimentare de c.c.



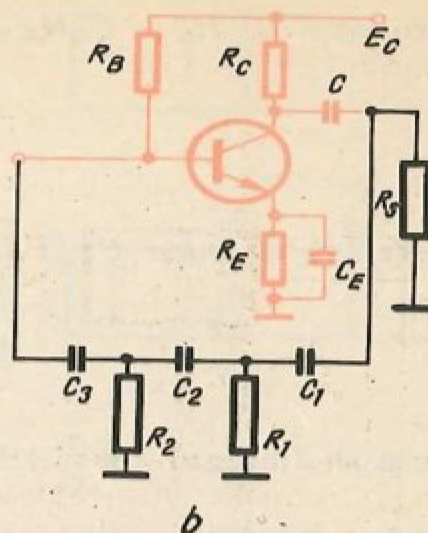


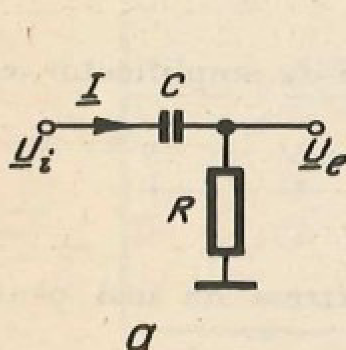
Fig. 5.42

O schemă practică de oscilator se prezintă ca în figura 5.42, *a*, unde circuitul de reacţie este realizat sub forma unui circuit în scară, *CR*.

Dacă amplificarea amplificatorului este negativă, circuitul generează oscilaţii cu frecvenţa egală cu frecvenţa la care defazajul introdus de circuitul *CR* este de π radiani. Celulele *CR* ale circuitului de defazare pot fi alese identice ($R_1 = R_2 = R_3$ şi $C_1 = C_2 = C_3$) sau cu valori care asigură pentru fiecare celulă o încărcare neglijabilă de către cea care îi urmează ($R_3 = 10R_2 = 100R_1$ şi $C_3 = 0{,}1C_2 = 0{,}01C_1$). În acest caz analiza este simplificată, deoarece se poate considera fiecare celulă (fig. 5.43, *a*) ca funcţionînd în gol şi realizînd un defazaj egal cu $\pi/3$ rad, aşa cum rezultă din diagrama fazorială din figura 5.43, *b*.

Funcţia de transfer a unei celule este

$$\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}$$



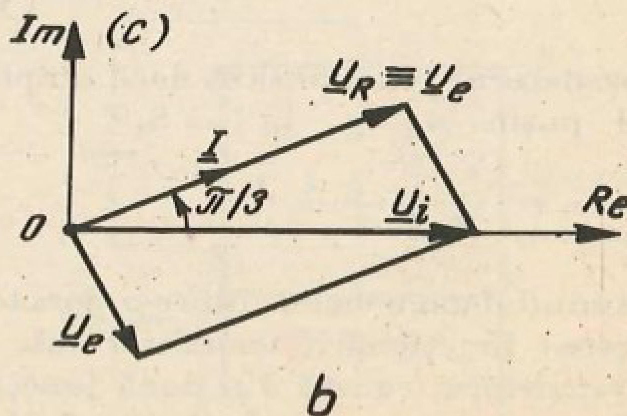


Fig. 5.43

şi deoarece $C_3R_3 = C_2R_2 = C_1R_1 = CR$ obţinem cu notaţiile din figura 5.42, *a*:

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \left(\frac{j\omega CR}{j\omega CR + 1}\right)^3.$$

Defazajul între $\underline{U}_e$ şi $\underline{U}_i$ pentru o singură celulă

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,(\omega_0 CR)$$

trebuie să fie egal cu $\frac{\pi}{3}$. Obţinem de aici:

$$\text{arc tg}\,(\omega_0 CR) = \frac{\pi}{6}\ \text{rad},$$

ω_0 fiind frecvenţa unghiulară a oscilaţiilor.

Deci, $\omega_0 CR = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.$

Frecvenţa oscilaţiilor este:

$$f_0 = \frac{0{,}577}{2\pi RC} = \frac{1}{10{,}88\ RC}.$$

Atenuarea unei singure celule este:

$$\left|\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i}\right| = \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} = \frac{0{,}577}{\sqrt{1 + 0{,}577^2}} \cong \frac{1}{2}$$

şi deci atenuarea circuitului de reacţie este

$$\beta = |\underline{\beta}| = \left|\frac{\underline{U}_e}{\underline{U}_i}\right|^3 = \frac{1}{8}.$$

Deci oscilatorul funcţionează dacă amplificarea realizată de amplificator este de cel puţin $A_u = |\underline{A}_u| = 8.$

3. Tranzistorul ca amplificator

Studiul fenomenelor dintr-o joncţiune *pn* este extrem de util pentru înţelegerea funcţionării tranzistorului.

Tranzistorul constă din două joncţiuni *pn*, una polarizată în sens direct şi cealaltă în sens invers. În figura 5.44 sînt arătate cele două tipuri de tranzistoare, *npn* şi *pnp*. Ele sînt astfel denumite după poziţia relativă a semi-

conductoarelor de tip *n* şi *p*: tranzistorul *npn* prezintă două regiuni de tip *n* separate printr-o regiune de tip *p*, în timp ce în tranzistorul *pnp* regiunea de tip *n* este încadrată de două regiuni de tip *p*.

Deoarece purtătorii de sarcină majoritari şi minoritari sînt diferiţi în cele două tipuri de materiale semiconductoare, mecanismul intern al conducţiei curentului în cele două tipuri de tranzistoare este diferit.

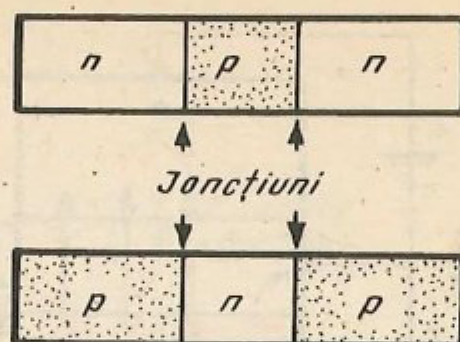


Fig. 5.44

a. Funcţionarea tranzistoarelor npn

După cum am mai spus, tranzistorul are cele două joncţiuni polarizate diferit.

• **Joncţiunea polarizată în sens direct** (fig. 5.45). De la început sînt necesare unele precizări referitoare la concentraţia relativă a atomilor de impurităţi în materialele joncţiunii. Semiconductorul de tip *n* al joncţiunii polarizate în sens direct este impurificat (dopat) mai puternic decît semiconductorul de tip *p*. Pentru acest motiv, *curentul prin joncţiune este datorat în principal traversării ei de către purtătorii majoritari ai regiunii de tip n (electroni)* şi nu de către ai celei de tip *p* (goluri).

○ **Notă.** Disproporţia între numărul de purtători de fiecare tip ce traversează joncţiunea nu este importantă în funcţionarea diodei, dar are mare importanţă în funcţionarea tranzistorului.

• **Joncţiunea polarizată în sens invers** (fig. 5.46) a mai fost examinată cu ocazia studiului conducţiei curentului în dioda semiconductoare. Am văzut atunci că joncţiunea polarizată în sens invers este traversată de un curent destul de mic (curentul invers), datorat deplasării purtătorilor minoritari. Pentru joncţiunea *pn* aceştia sînt electronii din regiunea *p* şi golurile din regiunea *n*.

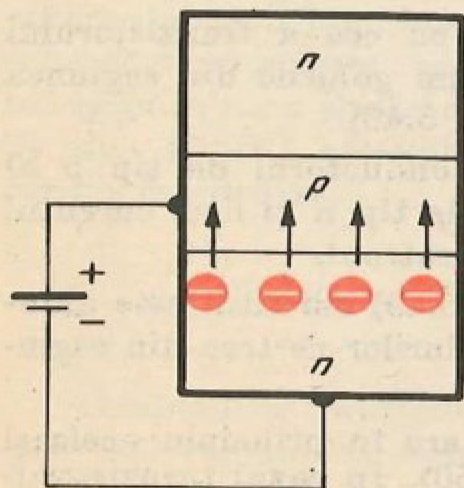


Fig. 5.45

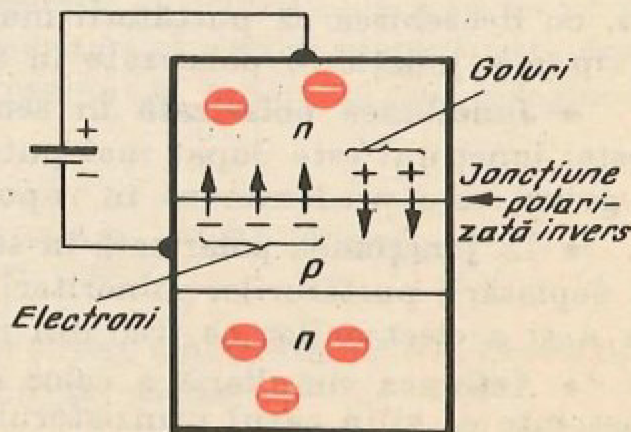


Fig. 5.46

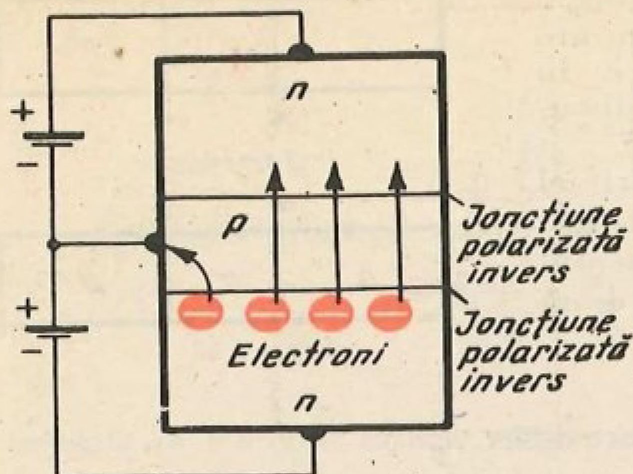


Fig. 5.47

• **Polarizarea simultană a celor două joncţiuni** este arătată în figura 5.47. Aşa cum am arătat, joncţiunea polarizată în sens direct este traversată de electronii injectaţi din regiunea de tip *n* către cea de tip *p*. Regiunea de tip *p* în care pătrund aceşti electroni este totodată regiune de tip *p* pentru joncţiunea polarizată în sens invers. În regiunea *p* sînt disponibili pentru conducţie cea mai mare parte dintre electronii veniţi din regiunea *n* (excepţie fac doar cei care se recombină cu golurile din această regiune) şi purtătorii minoritari ai joncţiunii polarizate în sens invers.

Datorită grosimii foarte mici a regiunii de tip *p*, numărul de electroni care se recombină cu golurile din această regiune este neînsemnat.

Electronii au tendinţa să se deplaseze în sensul în care potenţialul electric creşte (energia lor potenţială descreşte), sens impus de polaritatea sursei de curent continuu care polarizează cea de-a doua joncţiune.

Prin modificarea tensiunii de polarizare se modifică debitul de electroni ce traversează joncţiunea polarizată în sens direct, deci numărul de electroni disponibili pentru condiţia curentului prin joncţiunea polarizată în sens invers.

Mecanismul intern al conducţiei curentului în tranzistorul *npn* va ieşi şi mai pregnant în evidenţă cînd tranzistorul va fi considerat element de circuit.

b. *Funcţionarea tranzistoarelor pnp*

Funcţionarea tranzistorului *pnp* este similară cu cea a tranzistorului *npn*, cu deosebirea că purtătorii majoritari sînt acum golurile din regiunea de tip *p* a joncţiunii polarizate în sens direct (fig. 5.48).

• **Joncţiunea polarizată în sens direct.** Semiconductorul de tip *p* al acestei joncţiuni este dopat mai puternic decît cel de tip *n* şi deci curentul de goluri este predominant în raport cu cel de electroni.

• **În joncţiunea polarizată în sens invers** (fig. 5.49) curentul este datorat deplasării purtătorilor minoritari, respectiv a golurilor ce trec din regiunea *n* şi a electronilor ce trec din regiunea *p*.

• **Acţiunea simultană a celor două joncţiuni** are în principiu aceleaşi consecinţe ca şi în cazul tranzistorului *npn* (fig. 5.50). În cazul tranzistorului *pnp*, prin joncţiunea polarizată în sens direct se injectează goluri din regiunea *p* în regiunea *n*.

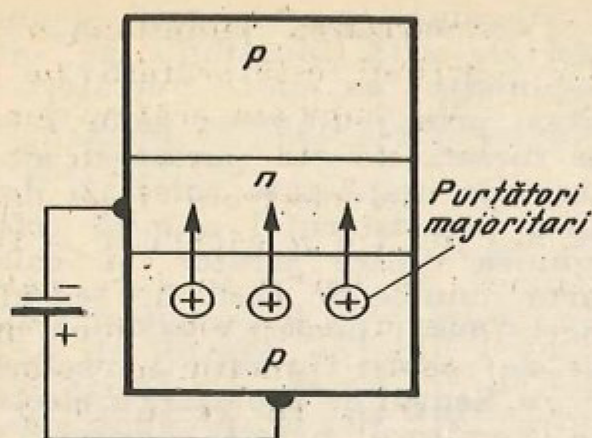


Fig. 5.48

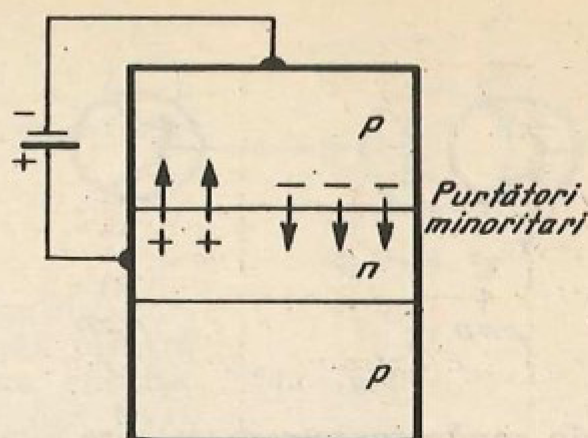


Fig. 5.49

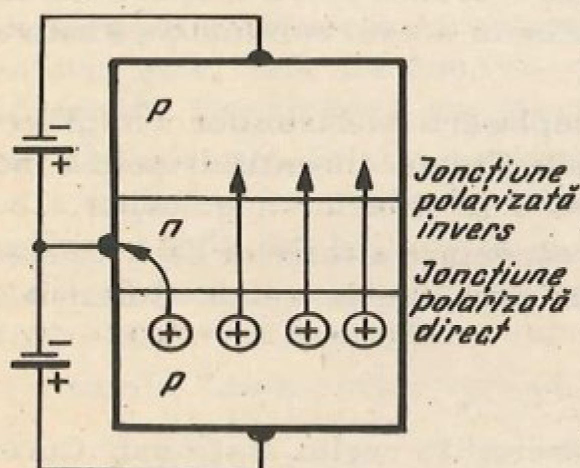
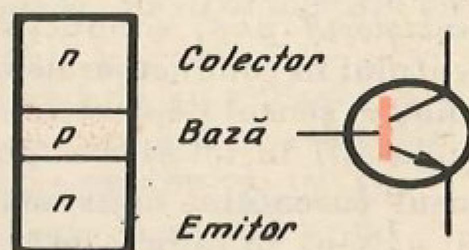


Fig. 5.50



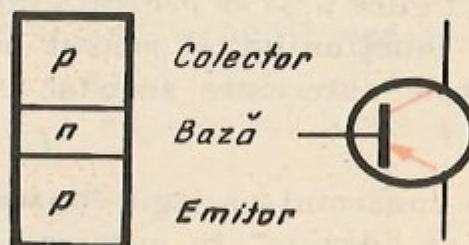


Fig. 5.51

Odată ajunse în regiunea *n*, golurile sînt disponibile pentru conducția curentului prin joncțiunea polarizată în sens invers, împreună cu purtătorii minoritari ai acestei regiuni. Numărul relativ al golurilor care se recombină în regiunea *n* cu electronii (purtători majoritari ai acestei regiuni) este destul de mic datorită grosimii mici a acestei regiuni în raport cu cea a regiunilor care o încadrează.

c. *Simboluri. Terminologie. Funcționarea tranzistorului conectat într-un circuit*

Simbolurile tranzistoarelor de tip *npn* și *pnp* sînt prezentate în figura 5.51. Cele trei regiuni se numesc *emitor*, *bază* și *colector*.

Joncțiunea polarizată în sens direct este *joncțiunea emitor-bază. Joncțiunea bază-colector* este polarizată în sens invers.

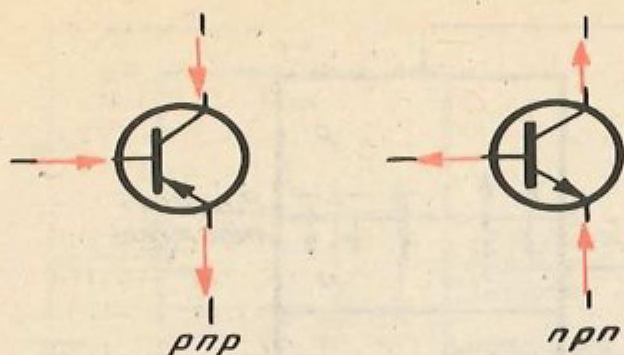


Fig. 5.52

Regiunea emitor este denumită astfel datorită funcţiunii pe care o îndeplineşte: ea emite purtători majoritari prin joncţiunea polarizată în sens direct. Aceşti purtători sînt în marea lor majoritate colectaţi de regiunea tranzistorului numită *colector*. Regiunea dintre emitor şi colector poartă numele de *bază* în sensul de suport (bază) pentru cele două materiale de acelaşi tip care o încadrează.

• **Sensul de deplasare a electronilor prin conductoarele exterioare** racordate la emitorul, baza şi colectorul unui tranzistor sînt indicate în figura 5.52.

Pentru tranzistorul npn, unde purtătorii majoritari sînt electronii, deplasarea lor prin conductoarele exterioare este o continuare a deplasării interne.

În tranzistorul pnp, conducţia internă este conducţie de goluri. Conducţia curentului în conductoarele exterioare este însă o conducţie electronică. Din acest motiv, sensul deplasării electronilor în aceste conductoare este opus sensului deplasării în interior a golurilor.

• **Sensul curentului** opus sensului deplasării electronilor (v. „Electrotehnica" cl. a X-a) se indică în figura 5.53. Sensul curentului prin conductoare coincide aşadar cu sensul de deplasare în interior a golurilor.

• În figura 5.54 se prezintă **modul de conectare a surselor de c.c. necesare polarizării joncţiunilor şi sensul curenţilor** prin aceste surse. Curenţii prin conductoarele exterioare satisfac relaţia:

$$I_E = I_B + I_C ,$$

care este o consecinţă a legii conservării sarcinii în regim staţionar. Curentul de emitor se „divide" în curentul de colector şi curentul de bază.

La rîndul său, curentul de colector este dependent de curentul de bază. Cu cît debitul purtătorilor majoritari injectaţi în bază este mai mare (I_E este mai mare) cu atît curentul de bază este mai mare şi în consecinţă este mai mare şi curentul de colector. Între cei doi curenţi există relaţia:

$$I_C = \beta I_B$$

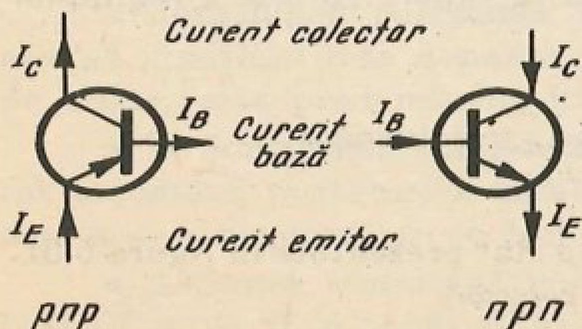


Fig. 5.53

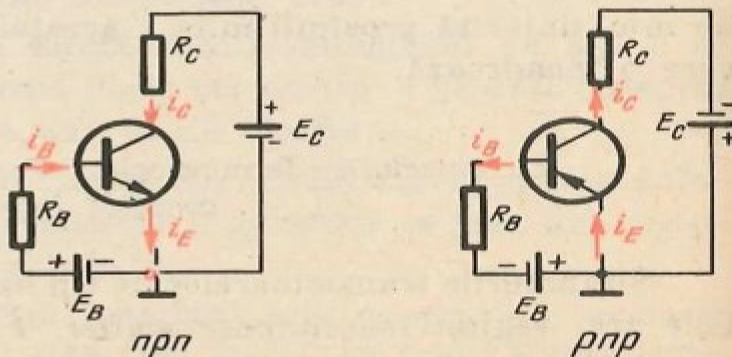


Fig. 5.54

unde β este *cîştigul în curent* sau *factorul de amplificare al curentului de bază*. Posibilitatea de a „controla" curentul de colector prin curentul de bază este fundamentală pentru funcţionarea tranzistorului ca amplificator.

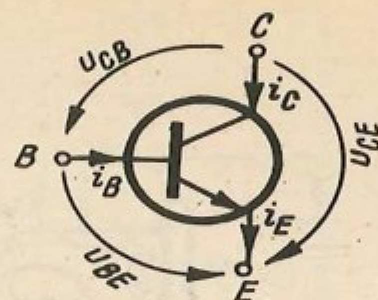


Fig. 5.55

d. *Tipuri de conexiuni*

Cînd tranzistorul este folosit ca amplificator, semnalul de intrare se aplică între două dintre cele trei terminale. Semnalul de ieşire va rezulta şi el între două dintre cele trei terminale, aşa încît unul dintre terminale este comun.

Circuitele prezentate în figura 5.54 sînt *circuite cu emitor comun*. Se pot utiliza funcţie de scopul urmărit şi alte configuraţii: *cu bază comună* sau *cu colector comun*. Configuraţia fundamentală pentru funcţiunea de amplificator este însă cea cu emitorul comun.

Înainte de a prezenta structura circuitului de amplificare şi funcţiunile elementelor sale, este necesară o prezentare sumară a **relaţiilor tensiune-curent pentru tranzistorul cu joncţiuni, în conexiunea cu emitor comun.**

• **Regim static.** Fiind un element de circuit cu trei borne de acces, starea statică a tranzistorului este determinată de curenţii prin borne i_E, i_B, i_C şi de tensiunile între borne u_{CE}, u_{BE} şi u_{CB}, aşa cum se indică în figura 5.55.

Cei trei curenţi satisfac prima teoremă a lui Kirchhoff, aşa încît numai doi dintre ei sînt independenţi.

Tensiunile între borne verifică teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_{CB} + u_{BE} - u_{CE} = 0$$

şi deci numai două dintre ele sînt independente.

Mărimile care se aleg pentru caracterizarea stării de conducţie a tranzistorului în configuraţia emitor comun sînt curenţii i_B şi i_C şi tensiunile u_{BE} şi u_{CE}. Dintre aceste mărimi, două pot fi considerate variabile independente, iar celelalte două — variabile dependente

Dacă variabilele independente sînt i_B şi u_{CE}, putem scrie relaţiile:

$$i_C = f(i_B,\ u_{CE})$$
$$u_{BE} = g(i_B,\ u_{CE})$$

care definesc *familiile de caracteristici statice de ieşire* şi respectiv *de intrare* ale tranzistorului.

Familia caracteristicilor de ieşire se determină experimental utilizînd circuitul din figura 5.56 în care sînt introduse instrumente de măsură pentru curentul de bază, curentul de colector, tensiunea de colector şi tensiunea de bază. Pentru o valoare dată a curentului i_B se determină curentul de colector

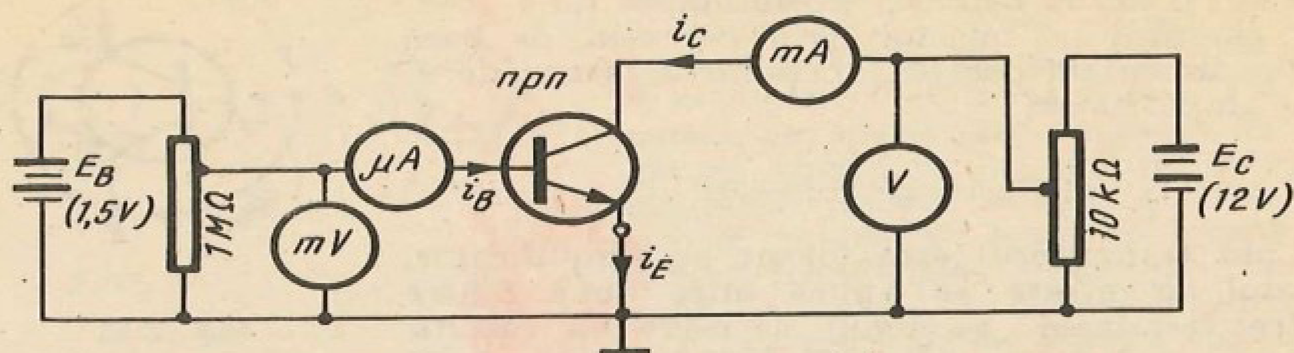


Fig. 5.6.6

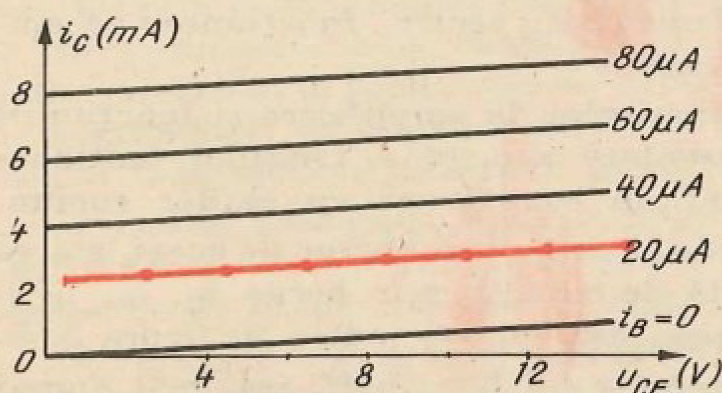


Fig. 5.57

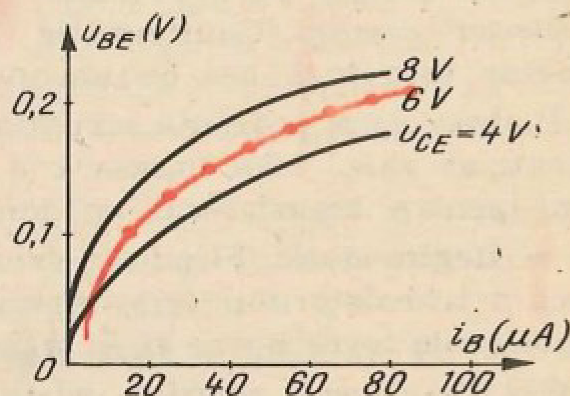


Fig. 5.58

la valori crescătoare ale tensiunii u_{CE}. În figura 5.57 se prezintă familia caracteristicilor de ieşire pentru valori ale curentului de bază ce cresc în progresie aritmetică.

Procedînd similar se determină şi familia de *caracteristici de intrare*, prezentate în figura 5.58.

• **Regim dinamic.** Datorită faptului că tranzistorul este un element neliniar, relaţiile dintre componentele variabile în timp ale tensiunilor şi curenţilor vor fi în general neliniare şi numai în anumite condiţii aceste relaţii se pot liniariza, ceea ce înseamnă că numai în anumite condiţii semnalul de ieşire va depinde liniar de semnalul de intrare. O asemenea comportare prezintă o mare importanţă practică în realizarea amplificatoarelor de semnal.

e. *Circuitul echivalent al tranzistorului la semnale mici*

Cea mai simplă schemă de amplificator cu un tranzistor se prezintă în figura 5.59, unde pentru fixarea punctului static de funcţionare se utilizează două surse de c.c., E_B şi E_C.

Sursa de semnal, cu t.e.m. alternativă sinusoidală, $e = E\sqrt{2}\sin\omega t$, se introduce în circuitul de polarizare a bazei. În absenţa acestei surse,

tranzistorul se află într-o stare statică determinată de t.e.m. E_B şi E_C şi de rezistenţele R_B şi R_C.

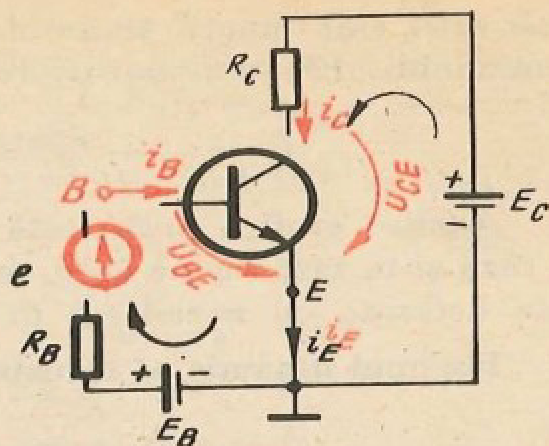


Fig. 5.59

• **Punctul static de funcţionare** se fixează în regiunea liniară a familiei de caracteristici statice, aşa cum se va arăta în continuare. Fie I_B, I_C, U_{CE} şi U_{BE} curenţii şi respectiv tensiunile în starea statică considerată.

• Prezenţa semnalului alternativ sinusoidal modifică valorile curenţilor şi tensiunilor în jurul valorilor din *PSF*, aşa cum se arată în figura 5.60. În acest nou regim, denumit **regim dinamic,** curenţii şi tensiunile se prezintă sub forma:

$$i_B = I_B + i_b;$$

$$i_C = I_C + i_c;$$

şi respectiv

$$u_{CE} = U_{CE} + u_{ce};$$

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{bc},$$

unde se pun în evidenţă valorile din punctul static şi variaţiile i_b, i_c, u_{bc} şi u_{bc} faţă de aceste valori. Variaţiile respective, în regimul dinamic la *sem-*

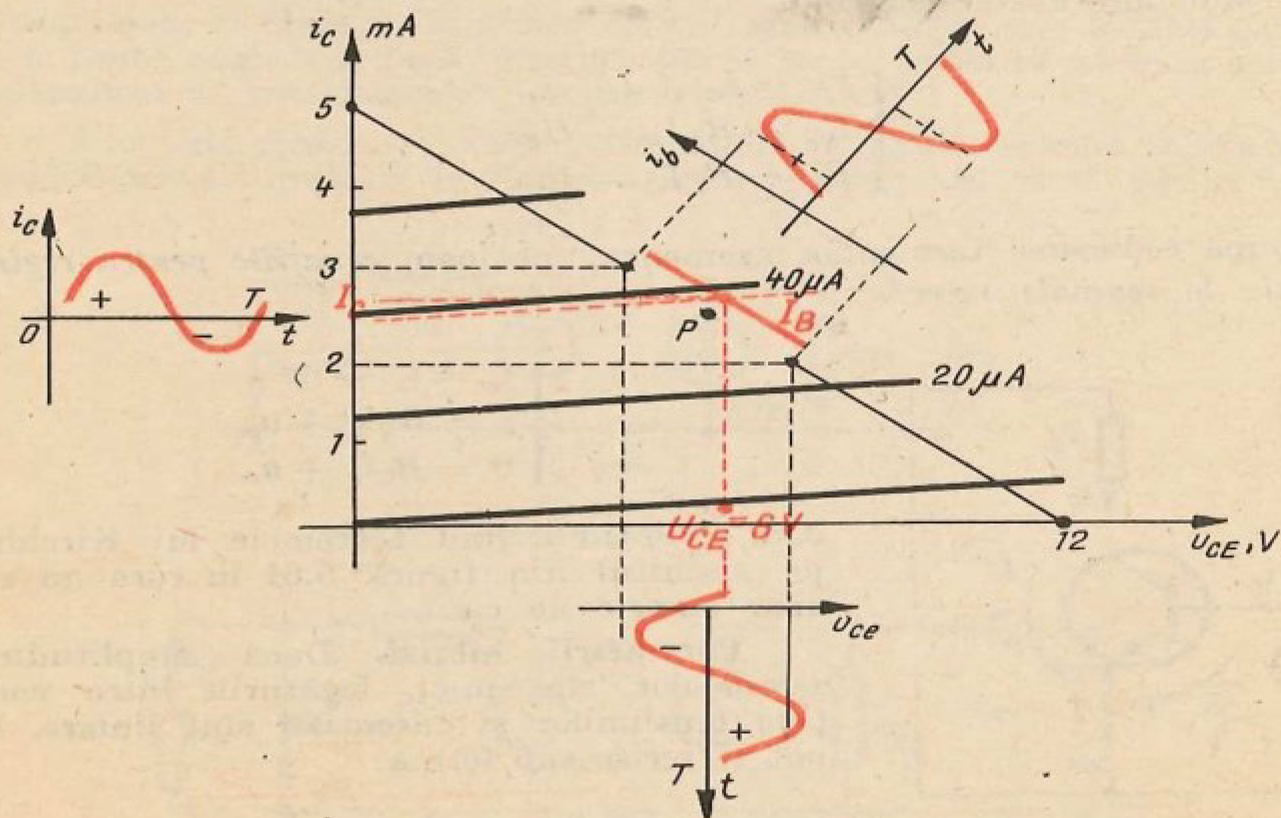


Fig. 5.60

nale mici sînt funcţii sinusoidale de timp, cu frecvenţa egală cu frecvenţa semnalului. Ele mai pot fi scrise şi astfel:

$$i_b = i_B - I_B = \Delta i_B;\ i_c = i_C - I_C = \Delta i_c \text{ etc.}$$

Analiza grafică prezentată în figura 5.60 arată că i_c şi i_b sînt mărimi în fază şi în fază cu t.e.m. e, în timp ce variaţia u_{ce} a tensiunii de colector este defazată cu π radiani în urma acestei t.e.m.

Regimul dinamic al tranzistorului este descris de ecuaţiile:

$$\begin{cases} i_E = i_C + i_B; \\ e + E_B = R_B i_B + u_{BE}; \\ E_C = R_C i_C + u_{CE}, \end{cases}$$

care rezultă scriind teoremele lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.59.

Înlocuind în aceste ecuaţii expresiile de mai sus, obţinem:

$$\begin{cases} I_E + i_e = I_C + i_c + I_B + i_b; \\ e + E_B = R_B I_B + R_B i_b + U_{BE} + u_{be}; \\ E_C = R_C I_C + R_C i_c + U_{CE} + u_{ce}. \end{cases}$$

Aceste relaţii pot căpăta o formă simplă, în care intervin numai variaţiile ce definesc regimul dinamic, deoarece între mărimile ce definesc regimul static sînt adevărate relaţiile:

$$\begin{cases} I_E = I_C + I_B \\ E_B = R_B I_B + U_{BE} \\ E_C = R_C I_C + U_{CE}. \end{cases}$$

După reducerea termenilor asemenea, obţinem *ecuaţiile pentru regimul dinamic la semnale mici:*

$$\begin{cases} i_e = i_c + i_b \\ e = R_B i_b + u_{be} \\ 0 = R_C i_c + u_{ce} \end{cases}$$

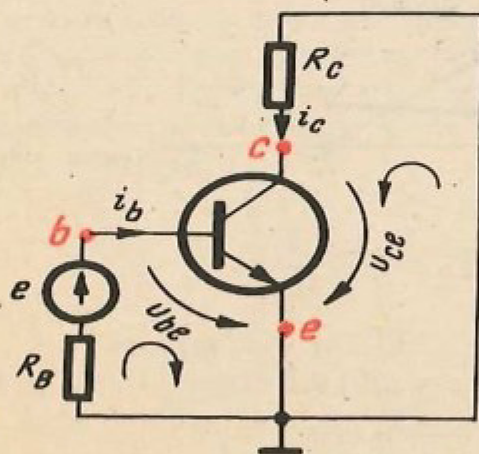


Fig. 5.61

care se obţin scriind teoremele lui Kirchhoff pe circuitul din figura 5.61 în care nu mai apar sursele de c.c.

Parametrii hibrizi. Dacă amplitudinile semnalelor sînt mici, legăturile între variaţiile tensiunilor şi curenţilor sînt liniare. Ele pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} u_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} u_{ce} \\ i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} u_{ce} \end{cases}$$

Ecuaţia $u_{be} = h_{ie} i_b + h_{re} u_{ce}$ reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff în poarta de intrare. Cea de-a doua ecuaţie, $i_c = h_{fe} i_b + h_{oe} u_{ce}$ reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff în poarta de ieşire.

Coeficienţii h_{ie}, h_{re}, h_{fe} şi h_{oe}, denumiţi *parametri hibrizi*, se definesc astfel:

$$h_{ie} = \left.\frac{u_{be}}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=const.}$$

$$h_{re} = \left.\frac{u_{be}}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{\Delta i_B=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=const.}$$

$$h_{fe} = \left.\frac{i_c}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=const.}$$

$$h_{oe} = \left.\frac{i_c}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{\Delta i_B=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=const.}$$

Semnificaţia acestor parametri rezultă imediat din schema echivalentă sub formă de diport a tranzistorului, indicată în figura 5.62:

— h_{ie} este impedanţa de intrare *(input)* cu bornele de ieşire *c*, *e* în scurtcircuit;

— h_{re} este factorul de transfer invers *(reverse)* în tensiune;

— h_{fe} este factorul de transfer direct *(forward)* în curent;

— h_{oe} este admitanţa de ieşire *(output)* cu intrarea în gol.

După cum se observă, în aceste notaţii primul indice este iniţiala cuvîntului în limba engleză indicat între paranteze, iar al doilea se referă la modul de conexiune al tranzistorului (emitor comun).

• Adoptînd pentru tranzistor acest model de diport, **schema echivalentă a amplificatorului** indicată în figura 5.62 se completează ca în figura 5.63,

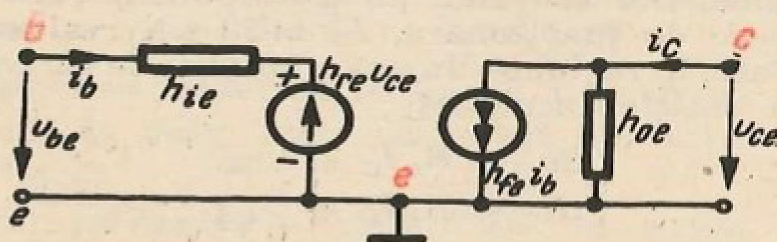


Fig. 5.62

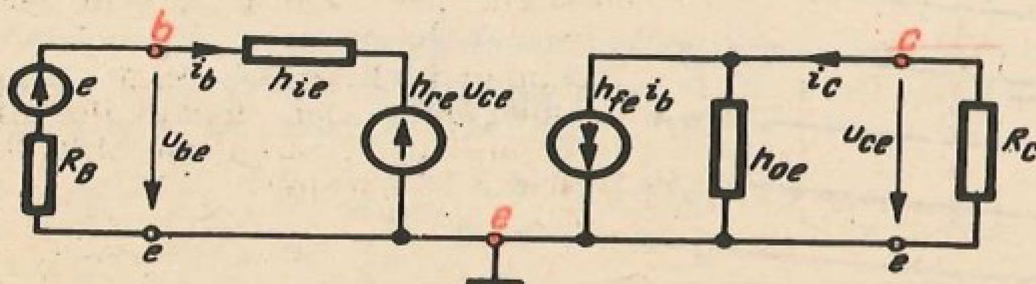


Fig. 5.63

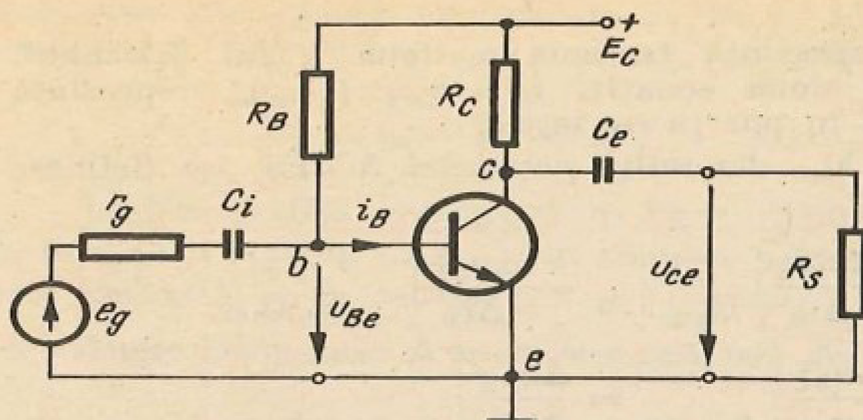


Fig. 5.64

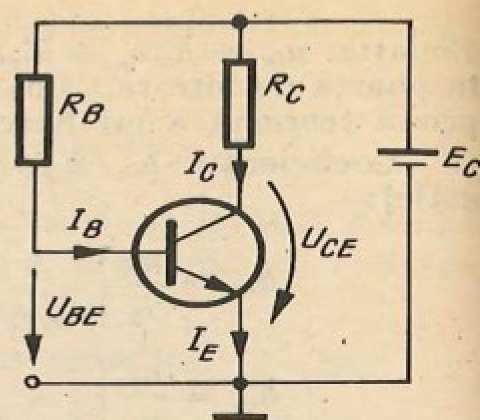


Fig. 5.65

iar sistemul de curenţi care definesc parametrii hibrizi se completează cu ecuaţiile:

$$\begin{cases} u_{be} = e - R_B i_b; \\ u_{ce} = -R_C i_c. \end{cases}$$

Din acest sistem de ecuaţii se obţine amplificarea în tensiune a amplificatorului, $A_u = \frac{u_{ce}}{u_{be}}$.

f. *Etajul de amplificare cu un tranzistor*

Un etaj practic de amplificare în care pentru fixarea punctului static de funcţionare se foloseşte o singură sursă de c.c. se indică în figura 5.64. Regimul static al tranzistorului se determină pe circuitul fără sursa de semnal, redat separat în figura 5.65.

Tranzistorul utilizat, de tip *npn* cu germaniu, are familia de caracteristici de ieşire indicate în figura 5.60.

• **Calculul elementelor schemei.** Să presupunem cunoscut curentul de bază în punctul static de funcţionare, $I_B = 50\ \mu A$, valoare ce corespunde poziţiei punctului static în regiunea liniară a familiei de caracteristici. Curenţii de bază şi colector satisfac ecuaţiile

$$\begin{cases} E_C = R_C I_C + U_{CE}; \\ E_C = R_B I_B + U_{BE}. \end{cases}$$

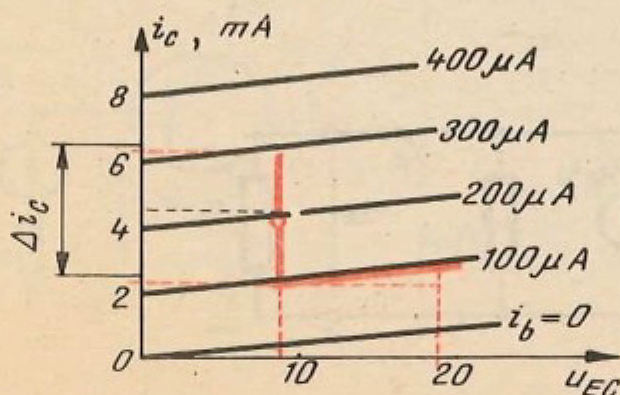


Fig. 5.66

Pentru tranzistorul cu germaniu putem considera $U_{BE} \cong 0{,}3$ V. Obținem astfel pentru *rezistența din circuitul de bază* valoarea:

$$R_B = \frac{E_C}{I_B} = \frac{12\ \text{V}}{60\ \mu\text{A}} = 0{,}2\ \text{M}\Omega = 200\ \text{k}\Omega.$$

Dacă cîștigul în curent al tranzistorului este $\beta = 50$, obținem pentru curentul de colector valoarea:

$$I_C = \beta I_B = 50 \times 60\ \mu\text{A} = 3\,000\ \mu\text{A} = 3\ \text{mA}.$$

Cu aceste valori rezultă pentru tensiunea colector-emitor valoarea $U_{CE} = 6$ V. *Rezistența din colector* este atunci:

$$R_C = \frac{E - U_{CE}}{I_C} = \frac{(12 - 6)\ \text{V}}{3\ \text{mA}} = 2\ \text{k}\Omega.$$

Condensatoarele C_i și C_e au rolul de a împiedica trecerea curentului continuu prin sursa de semnal și respectiv prin rezistența de sarcină. La frecvența de lucru, aceste condensatoare trebuie să prezinte însă impedanțe neglijabile, spre a nu influența funcționarea amplificatorului în curent alternativ.

• **Calculul amplificării.** Pentru a pune în evidență funcțiunea de amplificare a semnalelor alternative sinusoidale, să urmărim analiza grafică din figura 5.60.

Semnalul alternativ determină un curent de bază cu amplitudinea de 20 μA. Variația curentului de bază are loc în lungul dreptei de sarcină* și determină concomitent variații ale curentului de colector cu amplitudinea de aproximativ 0,6 mA și ale tensiunii de colector cu amplitudinea în jur de 1,2 V.

○ **Este de remarcat faptul că** tensiunea de colector are variația opusă variației curentului de bază. Între cele două mărimi sinusoidale există un defazaj de π radiani.

Amplificatorul realizează o *amplificare în curent*

$$A_I = \frac{I_c}{I_b} = \frac{0{,}6\ \text{mA}}{20\ \mu\text{A}} = 30.$$

Dacă presupunem o rezistență de intrare de 1 kΩ, amplitudinea semnalului de tensiune la intrarea amplificatorului va fi de 1 kΩ × 20 μA = 20 mV și deci *amplificarea în tensiune* rezultă

$$A_u = \frac{1{,}2\ \text{V}}{20\ \text{mV}} = 60.$$

---

* Rezistența de sarcină R_S se presupune foarte mare față de R_C.

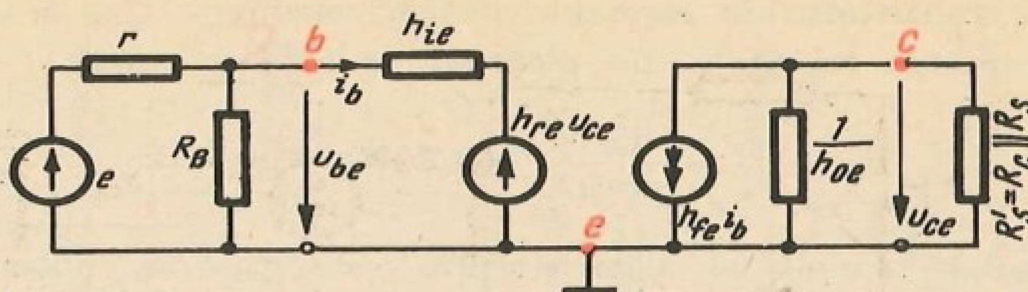


Fig. 5.67

Pentru a sublinia faptul că amplificatorul este inversor (de polaritate) indicăm amplificarea ca raport al imaginilor în complex ale tensiunilor u_{ce} şi u_{be}. Rezultă atunci

$$\underline{A}_u = \frac{\underline{U}_{ce}}{\underline{U}_{be}} = \frac{U_{ce}}{U_{be}} e^{j\pi} = -60.$$

Calculul amplificării amplificatorului se face pe schema echivalentă în c.a. a amplificatorului (fig. 5.67) în care se ignoră sursa de polarizare şi impedanţele condensatoarelor de cuplaj.

În calculul pe care-l vom face, vom considera valori tipice pentru parametrii tranzistoarelor utilizate pentru amplificarea semnalelor de j.f. (tabelul 5.1).

Tabelul 5.1

Valorile tipice ale parametrilor hibrizi

Parametru	*Valoare tipică*
h_{ie}	2 kΩ
h_{re}	10^{-4}
h_{fe}	100
$\frac{1}{h_{oe}}$	50 kΩ

Valoarea rezistenţei interne a generatorului poate fi cuprinsă în limite foarte largi, în funcţie de tipul sursei de semnal: pentru un generator de semnal din uzul laboratoarelor, rezistenţa r_g, este de ordinul sutelor de ohmi; dacă sursa de semnal este un microfon cu cristal, atunci r_g poate fi de ordinul megaohmilor.

Circuitul din figura 5.67 poate fi simplificat făcînd următoarele aproximaţii:

— deoarece $R_B \approx 0{,}2$ MΩ, adică mult mai mare decît oricare altă rezistenţă, poate fi exclusă (curentul alternativ prin R_B este neglijabil);

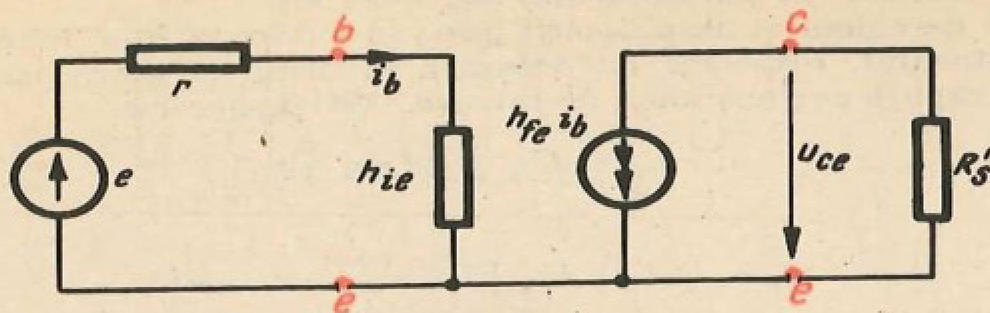


Fig. 5.68

— se poate exclude rezistența $\frac{1}{h_{oe}}$ de regulă mult mai mare decît $R'_S = R_S \| R_C$;

— putem neglija t.e.m. $h_{re}u_{ce}$, deoarece de regulă este mult mai mică decît u_{be} ($|h_{re}u_{ce}| \ll |u_{be}|$).

Circuitul practic pe care-l vom reține pentru calculele ce urmează este arătat în figura 5.68.

Circuitul echivalent simplificat al tranzistorului, valabil pentru semnale mici, este redat separat, în figură 5.69.

Amplificarea în tensiune a amplificatorului se calculează utilizînd teorema a doua a lui Kirchhoff în poarta de intrare și legea lui Ohm pentru rezistența de sarcină prin care trece curentul $h_{fe}i_b$, dependent de curentul de bază al tranzistorului.

Avem deci ecuațiile

$$\begin{cases} e = (r_g + h_{ie})i_b; \\ u_{ce} = -R'_S h_{fe} i_b, \end{cases}$$

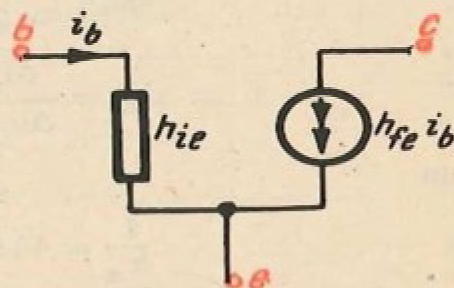


Fig. 5.69

din care rezultă:

$$u_{ce} = -R'_S h_{fe} \frac{e}{r_g + h_{ie}}.$$

Amplificarea în tensiune a amplificatorului este:

$$A_u = \frac{u_{ce}}{u_{be}} = \frac{-R'_S h_{fe} \frac{e}{r_g + h_{ie}}}{e_g \frac{h_{ie}}{r_g + h_{ie}}} = -\frac{h_{fe}}{h_{ie}} R'_S,$$

unde tensiunea u_{be} a fost calculată cu formula divizorului de tensiune:

$$u_{be} = e \frac{h_{ie}}{r_g + h_{ie}}.$$

Pentru rezistențe de sarcină comparabile cu h_{ie}, amplificarea este de ordinul de mărime al parametrului h_{fe} (~ 100).

Relația de calcul al amplificării pune în evidență funcțiunea de inversor a amplificatorului, respectiv de defazare în urmă cu π radiani a tensiunii de ieșire în raport cu tensiunea de intrare. Astfel, pentru

$$u_{be} = \underline{U}_{be} \sqrt{2} \sin \omega t,$$

rezultă:

$$u_{ce} = | A_u | U_{be} \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi).$$

Aplicație. *În figura 5.66 se prezintă caracteristicile statice pentru un tranzistor npn. Determinați parametrii „h" în punctul static de coordonate:*

$$I_B = 200\ \mu A,\ I_C = 4{,}5\ mA,\ U_{CE} = 10\ V.$$

Desenați apoi circuitul diport echivalent pentru semnale mici.

Parametrii h_{ie} și h_{re} se determină pe caracteristicile statice de intrare, utilizînd relațiile de definiție:

$$h_{ie} = \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\bigg|_{u_{CE} = U_{CE}},$$

$$h_{re} = \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\bigg|_{i_B = I_B}.$$

Deoarece se dau numai caracteristicile statice de ieșire, nu putem determina decît parametrii h_{fe} și h_{oe}. Conform relațiilor de definiție,

$$h_{fe} = \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\bigg|_{u_{CE} = U_{CE}} = \frac{4\ \text{mA}}{200\ \mu\text{A}} = \frac{4\,000}{200} = 20;$$

$$h_{oe} = \frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\bigg|_{i_B = I_B} = \frac{0{,}5\ \text{mA}}{10\ \text{V}} = 50 \times 10^{-6}\ \text{mho}$$

sau

$$\frac{1}{h_{oe}} = 40\ \text{k}\,\Omega.$$

CUPRINS

